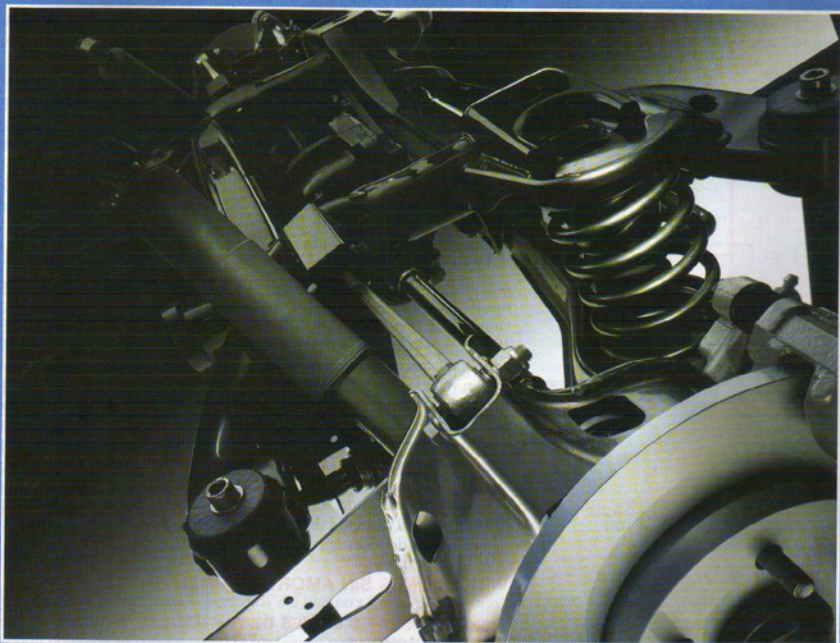


## Vibraciones mecánicas



Es posible que los sistemas mecánicos experimenten *vibraciones libres* o sean sometidos a *vibraciones forzadas*. Las vibraciones se llaman *amortiguadas* cuando se presentan fuerzas de fricción y *no amortiguadas* en otros casos. La suspensión de un automóvil, en esencia, está compuesta por resortes y amortiguadores absorbentes, los cuales ocasionan que el cuerpo del vehículo se someta a *vibraciones forzadas amortiguadas* cuando se le conduce por un camino disperejo.

## VIBRACIONES MECÁNICAS

- 19.1 Introducción  
Vibraciones sin amortiguamiento
- 19.2 Vibraciones libres de partículas. Movimiento armónico simple
- 19.3 Péndulo simple (solución aproximada)
- 19.4 Péndulo simple (solución exacta)
- 19.5 Vibraciones libres de cuerpos rígidos
- 19.6 Aplicación del principio de la conservación de la energía
- 19.7 Vibraciones forzadas  
Vibraciones amortiguadas
- 19.8 Vibraciones libres amortiguadas
- 19.9 Vibraciones forzadas amortiguadas
- 19.10 Analogías eléctricas

### 19.1. INTRODUCCIÓN

Una *vibración mecánica* es el movimiento de una partícula o cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio. La mayoría de las vibraciones en máquinas y estructuras son indeseables debido al aumento de los esfuerzos y a las pérdidas de energía que las acompañan. Por lo tanto, es necesario eliminarlas o reducirlas en el mayor grado posible mediante un diseño apropiado. El análisis de vibraciones se ha vuelto cada vez más importante en los últimos años debido a la tendencia actual para producir máquinas de más alta velocidad y estructuras más ligeras. Hay razones para esperar que esta tendencia continuará y que una inclusión mayor necesidad de análisis de vibraciones se generará en el futuro.

El análisis de vibraciones es un tema muy amplio al cual se han dedicado textos completos. En consecuencia, este estudio se limitará a los tipos más simples de vibraciones, a saber, las vibraciones de un cuerpo o un sistema de cuerpos con un grado de libertad.

Una vibración mecánica se produce por lo general cuando un sistema se desplaza de una posición de equilibrio estable. El sistema tiende a retornar a su posición bajo la acción de fuerzas restauradoras (ya sea fuerzas elásticas, como en el caso de una masa unida a un resorte, o fuerzas gravitacionales, como en el caso de un péndulo). Pero el sistema por lo general alcanza su posición original con cierta velocidad adquirida que lo lleva más allá de esa posición. Puesto que el proceso puede repetirse de manera indefinida, el sistema se mantiene moviéndose de un lado a otro de su posición de equilibrio. El intervalo de tiempo requerido para que el sistema realice un ciclo de movimiento completo recibe el nombre de *periodo* de la vibración. El número de ciclos por unidad de tiempo define la *frecuencia* y el desplazamiento máximo del sistema a partir de su posición de equilibrio se conoce como *amplitud* de la vibración.

Cuando el movimiento se mantiene únicamente por medio de fuerzas restauradoras, se dice que la fricción es una *vibración libre* (secciones 19.2 a 19.6). Cuando se aplica una fuerza periódica al sistema, el movimiento resultante se describe como una *vibración forzada* (sección 19.7). Cuando es posible ignorar los efectos de la fricción se afirma que las vibraciones son *no amortiguadas*. Sin embargo, todas las vibraciones son en realidad *amortiguadas* hasta cierto grado. Si una vibración libre sólo se amortigua de manera ligera, su amplitud decrece de manera lenta hasta que, después de cierto tiempo, el movimiento se interrumpe. Pero si el amortiguamiento es suficientemente largo para evitar cualquier vibración verdadera, en ese caso el sistema recupera lentamente su posición original (sección 19.8). Una vibración forzada amortiguada se mantiene siempre y cuando se aplique la fuerza periódica que la produce. Sin embargo, la amplitud de la vibración se ve afectada por la magnitud de las fuerzas de amortiguamiento (sección 19.9).

### VIBRACIONES SIN AMORTIGUAMIENTO

#### 19.2. VIBRACIONES LIBRES DE PARTÍCULAS. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Considere un cuerpo de masa  $m$  unido a un resorte de constante  $k$  (figura 19.1a). Puesto que en el tiempo presente se considera sólo el movimiento de su centro de masa, a este cuerpo se le considerará como una partícula. Cuando la partícula está en equilibrio estático, las fuer-



zas que actúan sobre ella son su peso  $W$  y la fuerza  $T$  ejercida por el resorte, de magnitud  $T = k\delta_{\text{estática}}$ , donde  $\delta_{\text{st}}$  denota la elongación del resorte. Por lo tanto, se tiene,

$$W = k\delta_{\text{estática}}$$

Supóngase ahora que la partícula se desplaza a una distancia  $x_m$  desde su posición de equilibrio y se suelta sin velocidad inicial. Si  $x_m$  se ha elegido más pequeña que  $\delta_{\text{estática}}$ , la partícula se moverá hacia un lado y otro de su posición de equilibrio; se ha generado una vibración de amplitud  $x_m$ . Advertirá que la vibración también puede producirse impartiendo cierta velocidad inicial a la partícula cuando ésta se encuentra en la posición de equilibrio  $x = 0$ , o, de manera más general, al iniciar el movimiento de la partícula desde una posición dada  $x = x_0$  con una velocidad inicial  $v_0$ .

Para analizar la vibración, se considerará la partícula en una posición  $P$  en algún tiempo arbitrario  $t$  (figura 19.1b). Denotando por  $x$  el desplazamiento  $OP$  medido desde la posición de equilibrio  $O$  (positivo hacia abajo), se nota que las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso  $W$  y la fuerza  $T$  ejercida por el resorte que, en esta posición, tiene una magnitud  $T = k(\delta_{\text{estática}} + x)$ . Como  $W = k\delta_{\text{st}}$ , se encuentra que la magnitud de la resultante  $F$  de las dos fuerzas (positiva hacia abajo) es

$$F = W - k(\delta_{\text{st}} + x) = -kx \quad (19.1)$$

De tal modo la *resultante* de las fuerzas ejercidas sobre la partícula es proporcional al desplazamiento  $OP$  medido desde la posición de equilibrio. Recordando la convención de signos, se advierte que  $F$  está dirigida siempre *hacia* la posición de equilibrio  $O$ . Sustituyendo  $F$  en la ecuación fundamental  $F = ma$  y recordando que  $a$  es la segunda derivada  $\ddot{x}$  de  $x$  con respecto a  $t$ , se escribe

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (19.2)$$

Hay que observar que debe usarse la misma convención de signos para la aceleración  $\ddot{x}$  y para el desplazamiento  $x$ , a saber, positivo hacia abajo.

El movimiento definido por la ecuación (19.2) recibe el nombre de *movimiento armónico simple*. Éste se caracteriza por el hecho de que la *aceleración es proporcional al desplazamiento y de dirección opuesta*. Se puede verificar que cada una de las funciones  $x_1 = \sin(\sqrt{k/m}t)$  y  $x_2 = \cos(\sqrt{k/m}t)$  satisface la ecuación (19.2). Por lo tanto, estas funciones constituyen dos *soluciones particulares* de la ecuación diferencial (19.2). La *solución general* de la ecuación 19.2 se obtiene al multiplicar cada una de las soluciones particulares por una constante arbitraria y sumando. De tal manera, la solución general se expresa como

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (19.3)$$

Observe que  $x$  es una *función periódica* del tiempo  $t$  y que, por lo tanto, representa una vibración de la partícula  $P$ . El coeficiente de  $t$  en la expresión obtenida se conoce como la *frecuencia circular natural* de la vibración y se denota por  $\omega_n$ . Se tiene

$$\text{Frecuencia circular natural} = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (19.4)$$

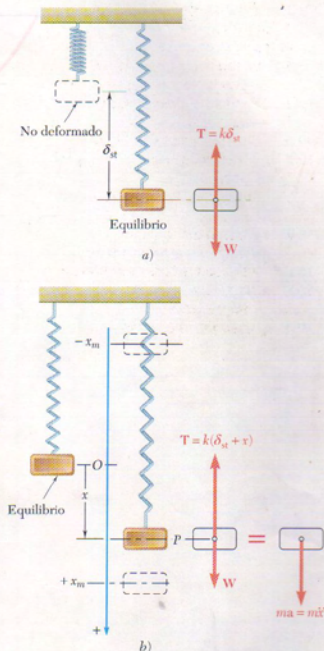


Figura 19.1

Al sustituir  $\sqrt{k/m}$  en la ecuación (19.3), se escribe

$$x = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t \quad (19.5)$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (19.6)$$

que puede obtenerse de la ecuación (19.2) al dividir ambos términos entre  $m$  y al observar que  $k/m = \omega_n^2$ . Al diferenciar dos veces ambos miembros de la ecuación (19.5) con respecto a  $t$ , se obtienen las siguientes expresiones para la velocidad y la aceleración en el tiempo  $t$

$$v = \dot{x} = C_1 \omega_n \cos \omega_n t - C_2 \omega_n \sin \omega_n t \quad (19.7)$$

$$a = \ddot{x} = -C_1 \omega_n^2 \sin \omega_n t - C_2 \omega_n^2 \cos \omega_n t \quad (19.8)$$

Los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  dependen de las condiciones iniciales del movimiento. Por ejemplo, se tiene  $C_1 = 0$  si la partícula se desplaza desde su posición de equilibrio y se suelta en  $t = 0$  sin ninguna velocidad inicial, y  $C_2 = 0$  si la partícula empieza desde  $O$  en  $t = 0$  con cierta velocidad inicial. En general, al sustituir  $t = 0$  y los valores iniciales  $x_0$  y  $v_0$  del desplazamiento y la velocidad en las ecuaciones (19.5) y (19.7), se halla que  $C_1 = v_0/\omega_n$  y  $C_2 = x_0$ .

Las expresiones obtenidas para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de una partícula pueden escribirse en una forma más compacta si se observa que la ecuación (19.5) expresa que el desplazamiento  $x = OP$  es la suma de las componentes de dos vectores  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente, de magnitud  $C_1$  y  $C_2$ , dirigidos como se muestra en la figura 19.2a. Cuando  $t$  varía, ambos vectores giran en el sentido de las manecillas del reloj; también se nota que la magnitud de su resultante  $\overline{OQ}$  es igual al desplazamiento máximo  $x_m$ . El movimiento armónico simple de  $P$  a lo largo del eje  $x$  puede obtenerse de esta manera proyectando sobre este eje el movimiento de un punto  $Q$  que describe un círculo auxiliar de radio  $x_m$  con una velocidad angular constante  $\omega_n$  (lo cual explica el nombre de frecuencia circular natural dado a  $\omega_n$ ). Al denotar por  $\phi$  el ángulo formado por los vectores  $\overline{OQ}$  y  $C_1$ , se escribe

$$OP = OQ \sin (\omega_n t + \phi) \quad (19.9)$$

que conduce a nuevas expresiones para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de  $P$

$$x = x_m \sin (\omega_n t + \phi) \quad (19.10)$$

$$v = \dot{x} = x_m \omega_n \cos (\omega_n t + \phi) \quad (19.11)$$

$$a = \ddot{x} = -x_m \omega_n^2 \sin (\omega_n t + \phi) \quad (19.12)$$

La curva desplazamiento-tiempo se representa por medio de una curva senoidal (figura 19.2b); el valor máximo  $x_m$  del desplazamiento se denomina la amplitud de la vibración, y el ángulo  $\phi$  que define la posición inicial de  $Q$  en el círculo se llama *ángulo de fase*. En la figura 19.2 se advirtió que un círculo completo se describe cuando el ángulo  $\omega_n t$  aumenta en  $2\pi$  rad. El valor correspondiente de  $t$ , denotado por  $\tau_n$ , se llama el *periodo* de la vibración libre y se mide en segundos. Se tiene



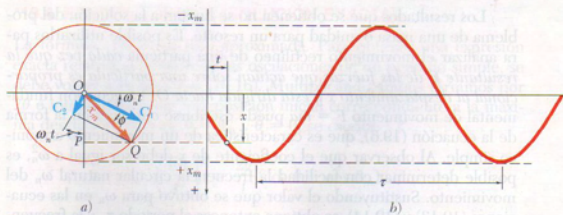


Figura 19.2

$$\text{Periodo} = \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (19.13)$$

El número de ciclos descritos por unidad de tiempo se denota mediante  $f_n$  y se conoce como *frecuencia natural* de la vibración. Se escribe

$$\text{Frecuencia natural} = f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (19.14)$$

La unidad de frecuencia es una frecuencia de 1 ciclo por segundo, correspondiendo a un periodo de 1 s. En términos de unidades fundamentales la unidad de frecuencia es consecuentemente  $1/\text{s}$  o  $\text{s}^{-1}$ . Se denomina *hertz* (Hz) en el SI de unidades. También se concluye de la ecuación (19.14) que una frecuencia de  $1 \text{ s}^{-1}$  o 1 Hz corresponde a una frecuencia circular de  $2\pi$  rad/s. En problemas que implican velocidades angulares expresadas en revoluciones por minuto (rpm), se tiene que  $1 \text{ rpm} = \frac{1}{60} \text{ s}^{-1} = \frac{1}{60} \text{ Hz}$ , o  $1 \text{ rpm} = (2\pi/60) \text{ rad/s}$ .

Al recordar que  $\omega_n$  se definió en (19.4) en términos de la constante  $k$  del resorte y de la masa  $m$  de la partícula, se observa que el periodo y la frecuencia son independientes de las condiciones iniciales y de la amplitud de la vibración. Hay que observar que  $\tau_n$  y  $f_n$  dependen de la *masa* y no del *peso* de la partícula y, por ello, son independientes del valor de  $g$ .

Las curvas velocidad-tiempo y aceleración-tiempo pueden representarse mediante curvas senoideas del mismo periodo que la curva desplazamiento-tiempo, pero con ángulos de fase diferentes. De las ecuaciones (19.11) y (19.12), se nota que los valores máximos de las magnitudes de la velocidad y la aceleración son

$$v_m = x_m \omega_n \quad a_m = x_m \omega_n^2 \quad (19.15)$$

Puesto que el punto Q describe al círculo auxiliar, de radio  $x_m$  a la velocidad angular constante  $\omega_n$ , su velocidad y aceleración son iguales, respectivamente, a las expresiones (19.15). Si se recuerdan las ecuaciones (19.11) y (19.12), se halla, por tanto, que la velocidad y la aceleración de P pueden obtenerse en cualquier instante proyectando sobre el eje  $x$  vectores de magnitudes  $v_m = x_m \omega_n$  y  $a_m = x_m \omega_n^2$  que representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración de Q en el mismo instante (figura 19.3).

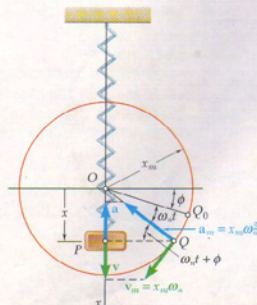


Figura 19.3

Los resultados que se obtienen no se limitan a la solución del problema de una masa o unidad para un resorte. Es posible utilizarlos para analizar el movimiento rectilíneo de una partícula *cada vez que la resultante  $\mathbf{F}$  de las fuerzas que actúan sobre una partícula es proporcional al desplazamiento  $x$  y está dirigida hacia  $O$* . La ecuación fundamental de movimiento  $F = ma$  puede escribirse entonces en la forma de la ecuación (19.6), que es característica de un movimiento armónico simple. Al observar que el coeficiente de  $x$  debe ser igual a  $\omega_n^2$ , es posible determinar con facilidad la frecuencia circular natural  $\omega_n$  del movimiento. Sustituyendo el valor que se obtuvo para  $\omega_n$  en las ecuaciones (19.13) y (19.14), se obtiene entonces el periodo  $\tau_n$  y la frecuencia natural  $f_n$  del movimiento.

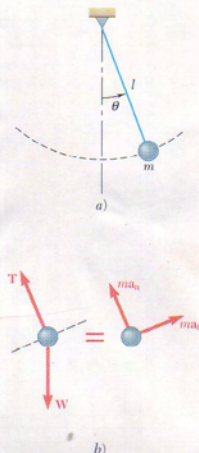


Figura 19.4

### 19.3. PÉNDULO SIMPLE (SOLUCIÓN APROXIMADA)

La mayor parte de las vibraciones encontradas en aplicaciones de ingeniería se representan mediante un movimiento armónico simple. Muchas otras, aunque de un tipo diferente, se aproximan por medio de un movimiento armónico simple, siempre que su amplitud permanezca pequeña. Considere, por ejemplo, un péndulo simple, consistente en una plomada de masa  $m$  unida a una cuerda de longitud  $l$ , que tiene la posibilidad de oscilar en un plano vertical (figura 19.4a). En un tiempo dado  $t$ , la cuerda forma un ángulo  $\theta$  con la vertical. Las fuerzas que actúan sobre la plomada son su peso  $\mathbf{W}$  y la fuerza  $\mathbf{T}$  ejercida por la cuerda (figura 19.4b). Al descomponer el vector  $m\mathbf{a}$  de las componentes tangencial y normal, con  $m\mathbf{a}_t$  dirigida hacia la derecha, esto es, en la dirección que corresponde a valores crecientes de  $\theta$ , y observar que  $a_t = l\alpha = l\ddot{\theta}$ , se escribe

$$\Sigma F_t = ma_t;$$

$$-W \sin \theta = m l \ddot{\theta}$$

Si se observa que  $W = mg$  y se divide entre  $ml$ , se obtiene

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (19.16)$$

Para oscilaciones de amplitud pequeña, puede sustituirse  $\sin \theta$  por  $\theta$ , expresado en radianes, y escribirse

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (19.17)$$

La comparación con la ecuación (19.6) muestra que la ecuación diferencial (19.17) es la de un movimiento armónico simple con una frecuencia circular natural  $\omega_n$  igual a  $(g/l)^{1/2}$ . La solución general de la ecuación (19.17) puede, por consiguiente, expresarse como

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_n t + \phi) \quad (19.18)$$

donde  $\theta_m$  es la amplitud de las oscilaciones y  $\phi$  es el ángulo de paso. Al sustituir en la ecuación (19.13) el valor obtenido por  $\omega_n$ , se obtiene la siguiente expresión por el periodo de las oscilaciones pequeñas de un péndulo de longitud  $l$ :

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (19.18)$$



La fórmula (19.18) es sólo aproximada. Para obtener una expresión exacta relativa al periodo de las oscilaciones de un péndulo simple, se debe volver a la ecuación (19.16). Multiplicando ambos términos por  $2\theta$  e integrando desde una posición inicial correspondiente a la máxima desviación, esto es,  $\theta = \theta_m$  y  $\dot{\theta} = 0$ , se escribe

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_m)$$

Si se sustituye  $\cos \theta$  por  $1 - 2 \sin^2(\theta/2)$  y  $\cos \theta_m$  por una expresión similar, resolviendo para  $dt$ , y se integra sobre un cuarto de periodo desde  $t = 0$ ,  $\theta = 0$  hasta  $t = \tau_n/4$ ,  $\theta = \theta_m$ , se tiene

$$\tau_n = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_m/2) - \sin^2(\theta/2)}}$$

La integral en el miembro del lado derecho se conoce como una *integral elíptica*; ésta no puede expresarse en términos de las funciones algebraicas o trigonométricas usuales. Sin embargo, al establecer

$$\sin(\theta/2) = \sin(\theta_m/2) \sin \phi$$

se puede escribir

$$\tau_n = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_m/2) \sin^2 \phi}} \quad (19.19)$$

donde la integral que se obtiene, denotada comúnmente por  $K$ , puede calcularse utilizando métodos de integración numérica. También puede encontrarse en *tablas de integrales elípticas* para diversos valores de  $\theta_m/2$ .<sup>†</sup> Para comparar el resultado que acaba de obtenerse con el de la sección anterior, se escribe la ecuación (19.19) en la forma

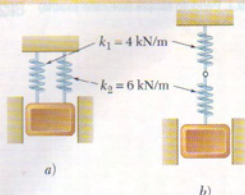
$$\tau_n = \frac{2K}{\pi} \left( 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \quad (19.20)$$

La fórmula (19.20) muestra que el valor real del periodo de un péndulo simple se puede obtener al multiplicar el valor aproximado dado en la ecuación (19.18) por el factor de corrección  $2K/\pi$ . Los valores del factor de corrección se dan en la tabla 19.1 para diversos valores de la amplitud  $\theta_m$ . Adverta que para cálculos de ingeniería ordinarios el factor de corrección puede omitirse siempre y cuando la amplitud no supere  $10^\circ$ .

**Tabla 19.1. Factor de corrección para el periodo de un péndulo simple**

$\theta_m$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$K$	1.571	1.574	1.583	1.598	1.686	1.854	2.157	2.768	$\infty$
$2K/\pi$	1.000	1.002	1.008	1.017	1.073	1.180	1.373	1.762	$\infty$

<sup>†</sup>Véase, por ejemplo, *Standard Mathematical Tables*, Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio.



## PROBLEMA RESUELTO 19.1

Un bloque de 50 kg se mueve entre guías verticales como se muestra. El bloque es empujado 40 mm hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta. Para cada arreglo de resorte, determine el periodo de la vibración, la máxima velocidad del bloque y su máxima aceleración.

### SOLUCIÓN

**a) Resortes conectados en paralelo.** Se determina primero la constante  $k$  de un solo resorte equivalente a los dos resortes *determinando la magnitud de la fuerza  $P$  que se requiere para causar una deformación  $\delta$* . Puesto que para una deformación  $\delta$  las magnitudes de las fuerzas ejercidas por el resorte son, respectivamente,  $k_1\delta$  y  $k_2\delta$ , se tiene

$$P = k_1\delta + k_2\delta = (k_1 + k_2)\delta$$

La constante  $k$  del resorte equivalente es

$$k = \frac{P}{\delta} = k_1 + k_2 = 4 \text{ kN/m} + 6 \text{ kN/m} = 10 \text{ kN/m} = 10^4 \text{ N/m}$$

**Periodo de vibración:** Puesto que  $m = 50 \text{ kg}$ , la ecuación (19.4) produce

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{10^4 \text{ N/m}}{50 \text{ kg}} \quad \omega_n = 14.14 \text{ rad/s}$$

$$\tau_n = 2\pi/\omega_n \quad \tau_n = 0.444 \text{ s}$$

**Velocidad máxima:**  $v_m = x_m\omega_n = (0.040 \text{ m})(14.14 \text{ rad/s})$   
 $v_m = 0.566 \text{ m/s} \quad v_m = 0.566 \text{ m/s} \uparrow$

**Aceleración máxima:**  $a_m = x_m\omega_n^2 = (0.040 \text{ m})(14.14 \text{ rad/s})^2$   
 $a_m = 8.00 \text{ m/s}^2 \quad a_m = 8.00 \text{ m/s}^2 \uparrow$

**b) Resortes conectados en serie.** Se determina primero la constante  $k$  de un solo resorte equivalente para los dos resortes *determinando la elongación total  $\delta$  de los resortes bajo una carga estática determinada  $P$* . Para facilitar el cálculo, se usa una carga estática de magnitud  $P = 12 \text{ kN}$ .

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} = \frac{12 \text{ kN}}{4 \text{ kN/m}} + \frac{12 \text{ kN}}{6 \text{ kN/m}} = 5 \text{ m}$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{12 \text{ kN}}{5 \text{ m}} = 2.4 \text{ kN/m} = 2400 \text{ N/m}$$

**Periodo de vibración:**  $\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{2400 \text{ N/m}}{50 \text{ kg}} \quad \omega_n = 6.93 \text{ rad/s}$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \tau_n = 0.907 \text{ s}$$

**Velocidad máxima:**  $v_m = x_m\omega_n = (0.040 \text{ m})(6.93 \text{ rad/s})$   
 $v_m = 0.277 \text{ m/s} \quad v_m = 0.277 \text{ m/s} \uparrow$

**Aceleración máxima:**  $a_m = x_m\omega_n^2 = (0.040 \text{ m})(6.93 \text{ rad/s})^2$   
 $a_m = 1.920 \text{ m/s}^2 \quad a_m = 1.920 \text{ m/s}^2 \uparrow$



## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Este capítulo aborda las *vibraciones mecánicas*, esto es, el movimiento de una partícula o un cuerpo oscilante en torno a una posición de equilibrio.

En esta primera lección se dijo que una *vibración libre* de una partícula ocurre cuando ésta está sujeta a una fuerza proporcional a su desplazamiento y de dirección opuesta, como la fuerza que ejerce un resorte (figura 19.1). El movimiento resultante, llamado *movimiento armónico simple*, está caracterizado por la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (19.2)$$

donde  $x$  es el desplazamiento de la partícula,  $\ddot{x}$  su aceleración,  $m$  es su masa y  $k$  es la constante del resorte. Se encontró que la solución de esta ecuación diferencial es

$$x = x_m \sin(\omega_n t + \phi) \quad (19.10)$$

donde  $x_m$  = amplitud de la vibración

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \text{frecuencia circular natural (rad/s)}$$

$$\phi = \text{ángulo de fase (rad)}$$

También se definió el *periodo* de la vibración como el tiempo  $\tau_n = 2\pi/\omega_n$  necesario para que la partícula realizara un círculo completo, y la *frecuencia natural* como el número de ciclos por segundo,  $f_n = 1/\tau_n = \omega_n/2\pi$ , expresada en Hz o  $\text{s}^{-1}$ . Al diferenciar la ecuación (19.10) dos veces se obtiene la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo. Se encontró que los valores máximos de la velocidad y la aceleración fueron

$$v_m = x_m \omega_n \quad a_m = x_m \omega_n^2 \quad (19.15)$$

Para determinar los parámetros en la ecuación (19.10) pueden seguirse estos pasos:

1. **Dibujar un diagrama de cuerpo libre como se muestra en las fuerzas ejercidas sobre la partícula** cuando ésta se encuentra a una distancia  $x$  de su posición de equilibrio. La resultante de estas fuerzas será proporcional a  $x$  y su dirección será opuesta a la dirección positiva de  $x$  [ecuación (19.1)].
2. **Escribir la ecuación diferencial de movimiento** igualando a  $m\ddot{x}$  la resultante de las fuerzas que se encontraron en el paso 1. Advierta que una vez que se ha elegido la dirección para  $x$ , debe usarse la misma convención de signos para la aceleración  $\ddot{x}$ . Después de la transposición, se obtendrá una ecuación de la forma de la ecuación (19.2).
3. **Determinar la frecuencia circular natural  $\omega_n$**  dividiendo el coeficiente de  $x$  por el coeficiente de  $\ddot{x}$  en esta ecuación y tomando la raíz cuadrada del resultado que se obtenga. Asegurarse de que  $\omega_n$  se exprese en rad/s.

(continúa)

**4. Determinar la amplitud de  $x_m$  y el ángulo de fase  $\phi$**  sustituyendo el valor que se obtuvo para  $\omega_n$  y los valores iniciales de  $x$  y  $\dot{x}$  en la ecuación (19.10) y la ecuación obtenida al diferenciar la ecuación 19.10 con respecto a  $t$ .

La ecuación (19.10) y las dos ecuaciones que se obtuvieron al diferenciar la ecuación (19.10) dos veces con respecto a  $t$  se pueden utilizar ahora para encontrar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo. Las ecuaciones (19.15) producen la velocidad máxima  $v_m$  y la aceleración máxima  $a_m$ .

**5. También para pequeñas oscilaciones del péndulo simple,** el ángulo  $\theta$  que la cuerda del péndulo forma con la vertical satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (19.17)$$

donde  $l$  es la longitud de la cuerda y  $\theta$  se expresa en radianes [sección 19.3]. Esta ecuación define de nuevo un *movimiento armónico simple*, y su solución es de la misma forma que la ecuación (19.10),

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_n t + \phi)$$

donde la frecuencia circular natural  $\omega_n = \sqrt{g/l}$  se expresa en rad/s. La determinación de las diversas constantes en esta expresión se realiza de manera similar a la que se describió antes. Recuerde que la velocidad de la plomada es tangente a la trayectoria y que su magnitud corresponde a  $v = l\dot{\theta}$ , mientras que la aceleración de la plomada tiene una componente tangencial  $a_t$  de magnitud  $a_t = l\ddot{\theta}$ , y una componente  $a_n$  dirigida hacia el centro de la trayectoria y de magnitud  $a_n = l\dot{\theta}^2$ .



# Problemas

**19.1** Una partícula se mueve de manera armónica simple. Si la amplitud es de 18 in. y la velocidad máxima corresponde a 6 ft/s, determine la aceleración máxima de la partícula y el periodo de su movimiento.

**19.2** Una partícula se mueve de manera armónica simple. Si la velocidad máxima es de 200 mm/s y la aceleración máxima corresponde a 4 m/s<sup>2</sup>, determine amplitud y frecuencia para el movimiento de esta partícula.

**19.3** Determine la amplitud y la aceleración máxima de una partícula que se mueve en movimiento armónico simple con velocidad máxima de 4 ft/s y frecuencia de 6 Hz.

**19.4** Un bloque de 20 lb se sostiene inicialmente de manera que el resorte vertical conectado como se muestra no está deformado. Si el bloque se suelta repentinamente desde el reposo, determine *a*) amplitud y frecuencia para el movimiento resultante, *b*) la velocidad máxima y la aceleración máxima del bloque.

**19.5** Un bloque de 70 lb se conecta a un resorte y puede moverse sin fricción por una ranura en la forma indicada. El bloque se encuentra en su posición de equilibrio cuando es golpeado con un martillo que le imprime una velocidad inicial de 10 ft/s. Determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento resultante, *b*) la amplitud del movimiento y la aceleración máxima del bloque.

**19.6** Un instrumento de laboratorio A está atornillado a una mesa agitadora en la forma indicada. La mesa se mueve verticalmente en movimiento armónico simple a la misma frecuencia que el motor de velocidad variable que la impulsa. El instrumento se va a probar a una aceleración pico de 50 m/s<sup>2</sup>. Si la amplitud de la mesa agitadora es de 58 mm, determine *a*) la velocidad que se requiere del motor en rpm, *b*) la velocidad máxima de la mesa.

**19.7** Un péndulo simple consiste en una plomada unida a una cuerda que oscila en un plano vertical con periodo de 1.3 s. Suponiendo un movimiento armónico simple y que la velocidad máxima de la plomada es de 0.4 m/s, determine *a*) la amplitud del movimiento en grados, *b*) la aceleración tangencial máxima de la plomada.

**19.8** Un bloque A de 10 lb descansa sobre una placa B de 40 lb, la cual está conectada a un resorte no deformado de constante  $k = 60$  lb/ft. La placa B se mueve lentamente 2.4 in. hacia la izquierda y se suelta desde el reposo. Si el bloque A no se desliza sobre la placa, determine *a*) la amplitud y frecuencia del movimiento resultante, *b*) el correspondiente valor permisible mínimo del coeficiente de fricción estática.

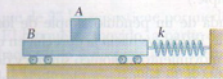


Figura P19.8

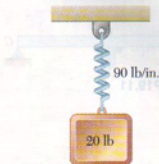


Figura P19.4

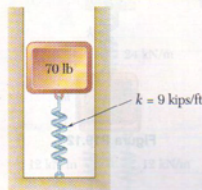


Figura P19.5

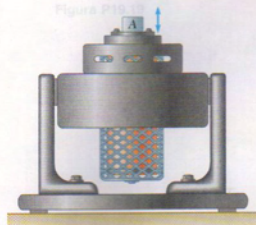


Figura P19.6

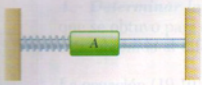


Figura P19.9



Figura P19.11



Figura P19.12

**19.9** Un collarín de 4 lb se conecta a un resorte de constante igual a 6 lb/in. y puede deslizarse sin fricción por una barra horizontal. El collarín está en reposo cuando es golpeado con un mazo y se le imprime una velocidad inicial de 55 in/s. Determine la amplitud y la aceleración máximas del collarín durante el movimiento resultante.

**19.10** El movimiento de una partícula se describe mediante la ecuación  $x = 60 \cos 10\pi t + 45 \sin(10\pi t - \pi/3)$ , donde  $x$  se expresa en milímetros y  $t$  en segundos. Para el movimiento resultante, determine *a*) el período, *b*) su amplitud, *c*) su ángulo de fase.

**19.11** Un motor de velocidad variable se conecta rigidamente a la viga BC. El rotor está un poco desbalanceado y ocasiona que la viga vibre con una frecuencia igual a la velocidad del motor. Cuando la velocidad del motor es menor que 600 rpm o mayor que 1200 rpm, se observa que un pequeño objeto colocado en A permanece en contacto con la viga. Para velocidades de entre 600 y 1200 rpm se observa que el objeto "baila" e incluso pierde contacto con la viga. Determine la amplitud del movimiento de A cuando la velocidad del motor es de *a*) 600 rpm, *b*) 1200 rpm. Proporcione sus respuestas tanto en unidades SI como en unidades de uso común en Estados Unidos.

**19.12** Un bloque de 1.4 kg está sostenido como se muestra mediante un resorte de constante  $k = 400$  N/m que puede actuar bajo tensión o compresión. El bloque se encuentra en la posición de equilibrio cuando se le golpea desde abajo con un martillo que le imprime una velocidad hacia arriba de 2.5 m/s. Determine *a*) el tiempo requerido para que el bloque se mueva 60 mm hacia arriba, *b*) la velocidad y aceleración correspondientes del bloque.

**19.13** En el problema 19.12, determine la posición, velocidad y aceleración del bloque 0.90 s después de que se le golpea con el martillo.

**19.14** Un bloque de 70 lb se conecta a un resorte de constante  $k = 9$  kips/ft y puede moverse sin fricción por una ranura en la forma indicada. El bloque se encuentra en su posición de equilibrio cuando es desplazado 15 in. hacia abajo y se le suelta. Determine para 1.5 s después de que el bloque es soltado *a*) la distancia total recorrida, *b*) su aceleración.

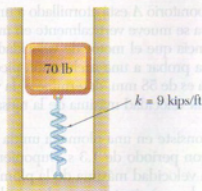


Figura P19.14

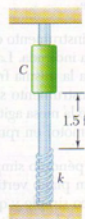


Figura P19.15

**19.15** Un collarín C de 10 lb es soltado desde el reposo en la posición que se muestra y se desliza sin fricción por una barra vertical hasta golpear un resorte de constante  $k = 50$  lb/ft, al cual comprime. La velocidad del collarín se reduce a cero y el collarín invierte la dirección de su movimiento para regresar a la posición inicial. Entonces el ciclo se repite. Determine *a*) el período del movimiento del collarín, *b*) la velocidad del collarín 0.4 s después de ser soltado. (Nota: Este es un movimiento periódico, pero no un movimiento armónico simple.)

**19.16** La plomada de un péndulo simple de longitud  $l = 1.2$  m se mueve con velocidad de 180 mm/s hacia la derecha en el tiempo  $t = 0$  cuando  $\theta = 0$ . Suponga un movimiento armónico simple y determine, en el tiempo  $t = 1.5$  s, *a*) el ángulo  $\theta$ , *b*) las magnitudes de la velocidad y aceleración de la plomada.

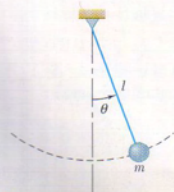


Figura P19.16



**19.17** Un collarín de 10 lb descansa sobre el resorte mostrado por la figura, al cual no está conectado. Cuando el collarín se empuja hacia abajo 9 in. o más y luego se suelta, se observa que pierde contacto con el resorte. Determine *a*) la constante del resorte, *b*) la posición, velocidad y aceleración del collarín 0.16 s después de ser empujado hacia abajo 9 in. y soltarse.

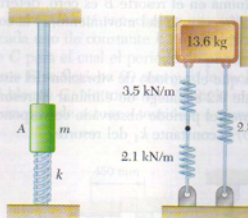


Figura P19.17 Figura P19.18

**19.18** Un bloque de 13.6 kg se sostiene mediante el arreglo de resortes mostrado. Si el bloque es movido, desde su posición de equilibrio, 44 mm verticalmente hacia abajo y luego se le suelta, determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento resultante, *b*) la velocidad y aceleración máximas del bloque.

**19.19** Un bloque de 50 kg se sostiene mediante el arreglo de resortes mostrado. El bloque es desplazado verticalmente hacia abajo a partir de su posición de equilibrio y luego se le suelta. Si la amplitud del movimiento resultante es igual a 60 mm, determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento, *b*) la velocidad y aceleración máximas del bloque.

**19.20** Un bloque de 10 lb, conectado al extremo inferior de un resorte cuyo extremo superior está fijo, vibra en un periodo de 6.8 s. Si la constante *k* del resorte es inversamente proporcional a su longitud, determine el periodo de un bloque de 6 lb que está conectado al centro del mismo resorte si los extremos superior e inferior del resorte están fijos.

**19.21** Dos resortes de constantes  $k_1$  y  $k_2$  se conectan en serie a un bloque *A* que vibra en movimiento armónico simple con un periodo de 5 s. Cuando los mismos dos resortes se conectan en paralelo al mismo bloque, éste vibra con un periodo de 2 s. Determine el cociente  $k_1/k_2$  de las dos constantes de resorte.

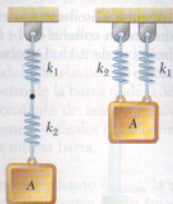


Figura P19.21

**19.22** Un bloque de 25 kg se sostiene por medio del arreglo de resortes que se muestra. El bloque es movido, a partir de su posición de equilibrio, verticalmente hacia abajo y después se le suelta. Determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento resultante, *b*) la velocidad máxima y la aceleración del bloque si la amplitud del movimiento es de 30 mm.

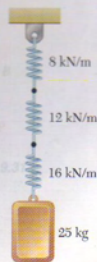


Figura P19.22

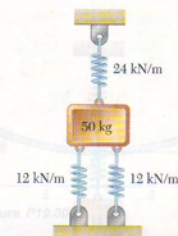


Figura P19.19

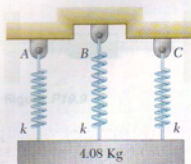


Figura P19.23

Figura P19.21

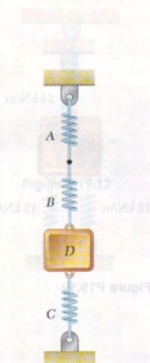


Figura P19.26



Figura P19.25

**19.23** Un bloque de 4.08 kg se sostiene como indica la figura mediante tres resortes, cada uno de los cuales tiene constante  $k$ . En la posición de equilibrio, la tensión en los resortes A, B y C es, respectivamente, de 22, 16 y 12 N. El bloque se desplaza verticalmente hacia abajo 12.5 mm, desde su posición de equilibrio, y se suelta a partir del reposo. Si en el movimiento resultante la tensión mínima en el resorte B es cero, determine *a*) la constante  $k$  del resorte, *b*) la frecuencia del movimiento, *c*) la compresión máxima en el resorte A.

**19.24** Se observa que el periodo de vibración del sistema de tres resortes y un bloque es de 0.2 s. Luego de eliminar el resorte de constante  $k_2 = 16 \text{ kN/m}$  del sistema, el periodo observado corresponde a 0.25 s. Determine *a*) la masa  $m$ , *b*) la constante  $k_1$  del resorte.

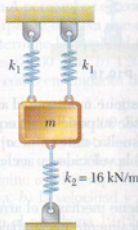


Figura P19.24

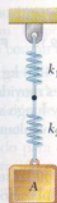


Figura P19.25

**19.25** El periodo de vibración del sistema que se muestra es de 0.2 s. Luego de retirar el resorte de constante  $k_2 = 3.5 \text{ kN/m}$  el bloque A se conecta al resorte de constante  $k_1$ , el periodo observado corresponde a 0.12 s. Determine *a*) la constante  $k_1$  del resorte restante, *b*) la masa del bloque A.

**19.26** El bloque D de 100 lb está sostenido como se muestra mediante tres resortes, cada uno de los cuales tiene constante  $k$ . El periodo de la vibración vertical permanece invariable cuando el bloque se sustituye por otro de 120 lb, el resorte A se cambia por un resorte de constante  $k_A$ , y los otros dos resortes quedan iguales. Si el periodo de vibración es de 0.4 s, determine los valores de  $k$  y de  $k_A$ .

**19.27** El periodo de las pequeñas oscilaciones del sistema que se muestra es igual a 1.6 s. Después de que un collarín de 14 lb se coloca arriba del collarín A, el periodo de oscilación es de 2.1 s. Determine *a*) el peso del collarín A, *b*) la constante de resorte  $k$ .

**19.15** Un collarín C de peso despreciable se suelta desde el reposo en la posición que se muestra y se desliza sin fricción por una barra vertical hasta golpear un resorte de constante  $k$ . Después de la colisión, el collarín C se mueve hacia arriba con la velocidad que se muestra. La velocidad del collarín C se reduce a cero y el collarín B, que inicialmente estaba en la posición de equilibrio para reposar en la posición inicial, se mueve hacia abajo. Determine *a*) el periodo del movimiento del collarín B, *b*) la velocidad del collarín C, *c*) después de ser soltado. (Nota: Este es un problema de movimiento armónico simple.)



Figura P19.27



**19.28** La barra  $AB$  está conectada a una articulación colocada en  $A$  y a dos resortes, cada uno de constante  $k$ . Si  $h = 700$  mm,  $d = 300$  mm, y  $m = 20$  kg, determine el valor de  $k$  para el cual el periodo de pequeñas oscilaciones es  $a)$  de 1 s,  $b)$  infinito. No tome en cuenta la masa de la barra y suponga que cada resorte puede actuar a tensión o a compresión.

**19.29** La barra  $AB$  está conectada a una articulación colocada en  $A$  y a dos resortes, cada uno de constante  $k = 1.35$  kN/m.  $a)$  Determine la masa  $m$  del bloque  $C$  para el cual el periodo de pequeñas oscilaciones es de 4 s.  $b)$  Si el extremo  $B$  se flexiona 60 mm y se le suelta, determine la velocidad máxima del bloque  $C$ . No tome en cuenta la masa de la barra y suponga que cada resorte puede actuar a tensión o a compresión.

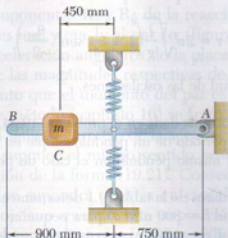


Figura P19.29

**19.30** De acuerdo con la mecánica de materiales, una viga de sección transversal uniforme que soporte de manera simple una carga estática  $P$  aplicada en el centro presentará una deflexión  $\delta_A = PL^3/48EI$ , donde  $L$  es la longitud de la viga,  $E$  el módulo de elasticidad,  $I$  el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga. Si  $L = 15$  ft,  $E = 30 \times 10^6$  psi,  $I = 2 \times 10^{-3}$  ft<sup>4</sup>, determine  $a)$  la constante de resorte equivalente de la viga,  $b)$  la frecuencia de vibración de un bloque de 1500 lb conectado al centro de la viga. Ignore la masa de la viga y suponga que la carga permanece en contacto con la viga.

**19.31** De acuerdo con la mecánica de materiales, cuando una carga estática  $P$  se aplica en el extremo  $B$  de una barra metálica uniforme fija en el extremo  $A$ , la longitud de la barra aumentará en una cantidad  $\delta = PL/AE$ , donde  $L$  es la longitud de la barra no deformada,  $A$  el área de la sección transversal, y  $E$  el módulo de elasticidad del material. Si  $L = 18$  in.,  $E = 29 \times 10^6$  lb/in.<sup>2</sup>, el diámetro de la barra mide 0.32 in., y se ignora el peso de ésta, determine  $a)$  la constante de resorte equivalente de la barra,  $b)$  la frecuencia de las vibraciones verticales del bloque de peso  $W = 16$  lb conectado al extremo  $B$  de la misma barra.

**19.32** Si se denota mediante  $\delta_{\text{estática}}$  la deflexión estática de una viga bajo determinada carga, demuestre que la frecuencia de vibración de la carga es

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{estática}}}}$$

Ignore la masa de la viga, y suponga que la carga permanece en contacto con la viga.

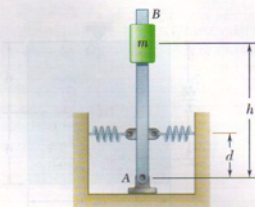


Figura P19.28

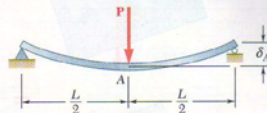


Figura P19.30

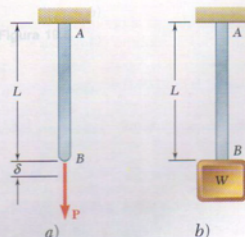


Figura P19.31

**\*19.33** La ecuación de fuerza-deflexión de un resorte no lineal fijo en un extremo es  $F = 4x^{1/2}$ , donde  $F$  es la fuerza, expresada en newtons, que se aplica en el otro extremo, y  $x$  es la deflexión expresada en metros. *a)* Determine la deflexión  $x_0$  si un bloque de 100 g se suspende del resorte y está en reposo. *b)* Suponiendo que la pendiente de la curva fuerza-deflexión en el punto correspondiente a esta carga puede utilizarse como una constante de resorte equivalente, determine la frecuencia de vibración del bloque si éste se somete a un pequeño desplazamiento hacia abajo desde su posición de equilibrio y luego se le suelta.

**\*19.34** Si el integrando de la ecuación (19.19), sección 19.4, se amplía hasta una serie de potencias pares de  $\sin \phi$  y se integra, demuestre que el periodo de un péndulo simple de longitud  $l$  puede aproximarse mediante la fórmula

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_m}{2} \right)$$

donde  $\theta_m$  es la amplitud de las oscilaciones.

**\*19.35** Con la fórmula dada en el problema 19.34, determine la amplitud  $\theta_m$  para la cual el periodo de un péndulo simple es 1 por ciento más largo que el periodo del mismo péndulo en el caso de pequeñas oscilaciones.

**\*19.36** Con los datos de la tabla 19.1 determine el periodo de un péndulo simple de longitud  $l = 800$  mm *a)* para pequeñas oscilaciones, *b)* para oscilaciones de amplitud  $\theta_m = 30^\circ$ , *c)* para oscilaciones de amplitud  $\theta_m = 90^\circ$ .

**\*19.37** Con los datos de la tabla 19.1, determine la longitud en pulgadas de un péndulo simple que oscila en un periodo de 3 s y una amplitud de  $\theta_m = 60^\circ$ .

## 19.5. VIBRACIONES LIBRES DE CUERPOS RÍGIDOS

El análisis de las vibraciones de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos que posee un solo grado de libertad es similar al análisis de las vibraciones de una partícula. Una variable apropiada, como una distancia  $x$  o un ángulo  $\theta$ , se elige para definir la posición del cuerpo o del sistema de cuerpos, y se escribe una ecuación que relacione esta variable y su segunda derivada respecto a  $t$ . Si la ecuación obtenida es de la misma forma que la ecuación (19.6), esto es, si se tiene

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (19.21)$$

la vibración considerada es un movimiento armónico simple. El periodo y la frecuencia natural de la vibración pueden obtenerse entonces identificando  $\omega_n$  y sustituyendo su valor en las ecuaciones (19.13) y (19.14).

En general, una forma simple de obtener una de las ecuaciones (19.21) consiste en expresar que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas si se dibuja un diagrama de cuerpo libre para un valor arbitrario de la variable, y se escribe la ecuación de movimiento apropiada. Recuérdese que el objetivo debe



ser la determinación del coeficiente de la variable  $x$  o  $\theta$ , no la determinación de la variable misma o de la derivada  $\dot{x}$  o  $\dot{\theta}$ . Al igualar este coeficiente a  $\omega_n^2$ , se obtiene la frecuencia circular natural  $\omega_n$  de la cual es posible determinar  $\tau_n$  y  $f_n$ .

El método descrito puede utilizarse para analizar vibraciones que son en verdad representadas mediante un movimiento armónico simple, o vibraciones de pequeña amplitud que es posible *aproximar* mediante un movimiento armónico simple. Como ejemplo, se determinará el periodo de pequeñas oscilaciones de una placa cuadrada de lado  $2b$  que está suspendida del punto medio  $O$  de uno de sus lados (figura 19.5a). Se considera la placa en una posición arbitraria definida por el ángulo  $\theta$  que forma la línea  $OG$  con la vertical y dibujamos una ecuación de diagramas de cuerpo libre para expresar que el peso  $W$  de la placa y que las componentes  $R_x$  y  $R_y$  de la reacción en  $O$  son equivalentes a los vectores  $m\mathbf{a}_x$  y  $m\mathbf{a}_y$  y al par  $\bar{I}\alpha$  (figura 19.5b). Puesto que la velocidad y la aceleración angulares de la placa son iguales, respectivamente, a  $\dot{\theta}$  y  $\ddot{\theta}$ , las magnitudes respectivas de los dos vectores son  $m b \dot{\theta}$  y  $m b \ddot{\theta}$ , en tanto que el momento del par es  $\bar{I} \ddot{\theta}$ . En las aplicaciones previas de este método (capítulo 16) se trató siempre que fue posible de suponer el sentido correcto de la aceleración. Sin embargo, en este caso se debe suponer el mismo sentido positivo para  $\theta$  y  $\ddot{\theta}$  para obtener una ecuación de la forma (19.21). Consecuentemente, la aceleración angular  $\ddot{\theta}$  se supondrá positiva en sentido contrario al de las manecillas del reloj, aun cuando esta suposición es evidentemente irreal. Al igualar los momentos con respecto a  $O$ , se escribe

$$-W(b \sin \theta) = (mb \ddot{\theta})b + \bar{I} \ddot{\theta}$$

Si se observa que  $\bar{I} = \frac{1}{12}m[(2b)^2 + (2b)^2] = \frac{2}{3}mb^2$  y  $W = mg$ , se obtiene

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{5} \frac{g}{b} \sin \theta = 0 \quad (19.22)$$

Para oscilaciones de pequeña amplitud, se puede sustituir  $\sin \theta$  por  $\theta$ , expresado en radianes, y escribir

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{5} \frac{g}{b} \theta = 0 \quad (19.23)$$

La comparación con (19.21) muestra que la ecuación obtenida es la de un movimiento armónico simple y que la frecuencia circular natural  $\omega_n$  de las oscilaciones es igual a  $(3g/5b)^{1/2}$ . Al sustituir (19.13), se encuentra que el periodo de las oscilaciones es

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{5b}{3g}} \quad (19.24)$$

El resultado que se obtiene es válido sólo para oscilaciones de pequeña amplitud. Una descripción más exacta del movimiento de la placa se obtiene al comparar las ecuaciones (19.16) y (19.22). Hay que observar que las dos ecuaciones son idénticas si se elige  $l$  igual a  $5b/3$ . Esto significa que la placa oscilará como un péndulo simple de longitud  $l = 5b/3$ , y es posible utilizar los resultados de la sección 19.4 para corregir el valor del periodo dado en (19.24). El punto  $A$  de la placa localizado en la línea  $OG$  a una distancia  $l = 5b/3$  desde  $O$  se define como el *centro de oscilación* correspondiente a  $O$  (figura 19.5a).

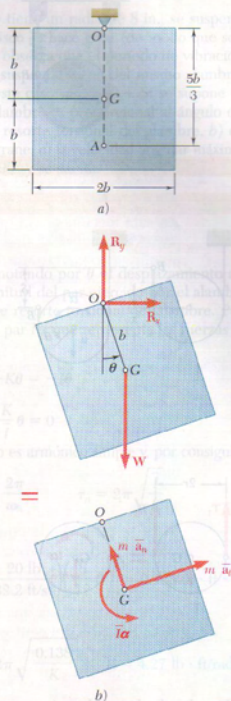
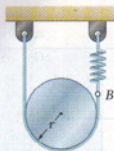


Figura 19.5



## PROBLEMA RESUELTO 19.2

Un cilindro de peso  $W$  y radio  $r$  se suspende de una cuerda que le da vuelta como se indica. Un extremo de la cuerda se conecta directamente a un soporte rígido, en tanto que el otro extremo se une a un resorte de constante  $k$ . Determine el periodo y la frecuencia natural de las vibraciones del cilindro.

## SOLUCIÓN

**Cinemática del movimiento.** Se expresa el desplazamiento lineal y la aceleración del cilindro en términos del desplazamiento angular  $\theta$ . Al elegir el sentido positivo en el sentido de las manecillas del reloj y al medir los desplazamientos desde la posición de equilibrio, se escribe

$$\begin{aligned}\bar{x} &= r\theta & \delta &= 2\bar{x} = 2r\theta \\ \alpha &= \ddot{\theta} & \bar{a} &= r\alpha = r\ddot{\theta} & \bar{a} &= r\ddot{\theta} \quad (1)\end{aligned}$$

**Ecuaciones de movimiento.** El sistema de fuerzas externas que actúan sobre un cilindro consiste en el peso  $W$  y las fuerzas  $T_1$  y  $T_2$  que ejerce la cuerda. Se expresa que este sistema es equivalente al de las fuerzas efectivas representado por el vector  $m\bar{a}$  aplicado a  $G$  y al par  $I\alpha$ .

$$+\sum M_A = \sum (M_A)_{ef}: \quad Wr - T_2(2r) = m\bar{a}r + I\alpha \quad (2)$$

Cuando el cilindro está en su posición de equilibrio, la tensión en la cuerda es  $T_0 = \frac{1}{2}W$ . Note que para un desplazamiento angular  $\theta$ , la magnitud de  $T_2$  es

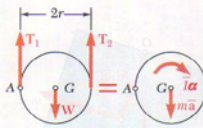
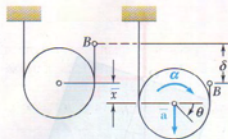
$$T_2 = T_0 + k\delta = \frac{1}{2}W + k\delta = \frac{1}{2}W + k(2r\theta) \quad (3)$$

La sustitución de (1) y (3) en (2), y el hecho de que  $I = \frac{1}{2}mr^2$ , permiten escribir

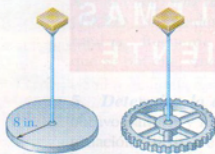
$$\begin{aligned}Wr - \left(\frac{1}{2}W + k(2r\theta)\right)(2r) &= m(r\ddot{\theta})r + \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} + \frac{8}{3}\frac{k}{m}\theta &= 0\end{aligned}$$

El movimiento se observa como armónico simple, y se tiene

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{8}{3}\frac{k}{m} & \omega_n &= \sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}} \\ \tau_n &= \frac{2\pi}{\omega_n} & \tau_n &= 2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{m}{k}} \\ f_n &= \frac{\omega_n}{2\pi} & f_n &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}\end{aligned}$$







## PROBLEMA RESUELTO 19.3

Un disco circular, que pesa 20 lb y tiene un radio de 8 in., se suspende de un alambre como se muestra. El disco se hace girar (de modo que se tuerce el alambre) y luego se suelta; se observa que el periodo de vibración torsional es de 1.13 s. Un engrane se suspende luego del mismo alambre, y el periodo de vibración torsional en este caso vale 1.93 s. Si se supone que el momento del par ejercido por el alambre es proporcional al ángulo de torsión, determine *a*) la constante de resorte torsional del alambre, *b*) el momento de inercia centroidal del engrane, *c*) la velocidad angular máxima que alcanza el engrane si se hace girar 90° y se suelta.

### SOLUCIÓN

**a) Vibración del disco.** Denotando por  $\theta$  el desplazamiento angular del disco, se expresa que la magnitud del par ejercido por el alambre es  $M = K\theta$ , donde  $K$  es la constante de resorte torsional del alambre. Puesto que este par debe ser equivalente al par  $I\alpha$  que representa las fuerzas efectivas del disco, se escribe

$$+\sum M_O = \Sigma(M_O)_{ef}: \quad +K\theta = -\tilde{I}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{\tilde{I}}\theta = 0$$

Se puede observar que el movimiento es armónico simple y, por consiguiente,

$$\omega_n^2 = \frac{K}{\tilde{I}} \quad \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{\tilde{I}}{K}} \quad (1)$$

Para el disco, se tiene

$$\tau_n = 1.13 \text{ s} \quad \tilde{I} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)\left(\frac{8}{12} \text{ ft}\right)^2 = 0.138 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Al sustituir (1), se obtiene

$$1.13 = 2\pi\sqrt{\frac{0.138}{K}} \quad K = 4.27 \text{ lb} \cdot \text{ft/rad} \quad \blacktriangleleft$$

**b) Vibración del engrane.** Puesto que el periodo de vibración del engrane es 1.93 y  $K = 4.27 \text{ lb} \cdot \text{ft/rad}$ , la ecuación (1) produce

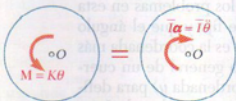
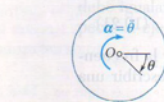
$$1.93 = 2\pi\sqrt{\frac{\tilde{I}}{4.27}} \quad \tilde{I}_{\text{engrane}} = 0.403 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \quad \blacktriangleleft$$

**c) Velocidad angular máxima del engrane.** Puesto que el movimiento es armónico simple, se tiene

$$\theta = \theta_m \sin \omega_n t \quad \omega = \theta_m \omega_n \cos \omega_n t \quad \omega_m = \theta_m \omega_n$$

Si se recuerda que  $\theta_m = 90^\circ = 1.571 \text{ rad}$  y  $\tau = 1.93 \text{ s}$ , se escribe

$$\omega_m = \theta_m \omega_n = \theta_m \left(\frac{2\pi}{\tau}\right) = (1.571 \text{ rad}) \left(\frac{2\pi}{1.93 \text{ s}}\right) \quad \omega_m = 5.11 \text{ rad/s} \quad \blacktriangleleft$$



# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se vio que un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, cuya posición puede definirse mediante una sola coordenada  $x$  o  $\theta$ , producirá un movimiento armónico simple si la ecuación diferencial que se obtiene al aplicar la segunda ley de Newton es de la forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (19.21)$$

La meta es determinar  $\omega_n$ , a partir de la cual se obtiene el periodo  $\tau_n$  y la frecuencia natural  $f_n$ . Al tomar en cuenta las condiciones iniciales, es posible escribir una ecuación de la forma

$$x = x_m \sin(\omega_n t + \phi) \quad (19.10)$$

donde  $x$  debe sustituirse por  $\theta$  si se incluye una rotación. Para resolver los problemas de esta lección, es necesario seguir estos pasos:

**1. Elegir una coordenada que medirá el desplazamiento del cuerpo** a partir de su posición de equilibrio. Se descubrirá que muchos de los problemas en esta lección implican la rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo y que el ángulo que mide la rotación del cuerpo desde su posición de equilibrio es la coordenada más conveniente. En problemas que implican el movimiento plano general de un cuerpo, donde se utiliza una coordenada  $x$  (y posiblemente una coordenada  $y$ ) para definir la posición del centro de masa  $G$  del cuerpo, y se recurre a una coordenada  $\theta$  para medir su rotación respecto a  $G$ , determine las relaciones cinemáticas que le permitirán expresar  $x$  (y  $y$ ) en términos de  $\theta$  [problema resuelto 19.2].

**2. Dibujar una ecuación de diagramas de cuerpo libre** para expresar que el sistema de fuerzas externas es equivalente al sistema de fuerzas efectivas, el cual consiste en el vector  $m\bar{a}$  y el par  $I\alpha$ , donde  $\bar{a} = \ddot{x}$  y  $\alpha = \ddot{\theta}$ . Asegúrese de que cada fuerza o par aplicado se dibuje en una dirección consistente con el desplazamiento supuesto y que los sentidos de  $\bar{a}$  y  $\alpha$  sean, respectivamente, aquellos en los cuales las coordenadas  $x$  y  $\theta$  están aumentando.

**3. Escribir las ecuaciones diferenciales de movimiento** igualando las sumas de las componentes de las fuerzas externas efectivas en las direcciones  $x$  y  $y$  y las sumas de sus momentos con respecto a un punto dado. Si es necesario, utilice las relaciones cinemáticas que se formularon en el paso 1 para obtener ecuaciones que implican sólo a la coordenada  $\theta$ . Si  $\theta$  es un ángulo pequeño reemplace  $\sin \theta$  por  $\theta$  y  $\cos \theta$  por 1, si estas funciones aparecen en sus ecuaciones. Eliminando todas las relaciones desconocidas, se obtendrá una ecuación del tipo de las ecuaciones (19.21). Adverti que en problemas que implican un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo, es posible obtener de inmediato una ecuación de este tipo al igualar los momentos de las fuerzas externas efectivas con respecto al eje fijo.



4. Al comparar las ecuaciones que se han obtenido con una de las ecuaciones (19.21) se pueden identificar  $\omega_n^2$  y, por ello, determinar la frecuencia circular natural  $\omega_n$ . Recuerde que el objeto del análisis *no es resolver* la ecuación diferencial que se obtiene, *sino identificar*  $\omega_n^2$ .

5. **Determine la amplitud y el ángulo de fase  $\phi$**  sustituyendo el valor que se obtuvo para  $\omega_n$  y los valores iniciales de las coordenadas y su primera derivada en la ecuación (19.10) y en la ecuación obtenida al diferenciar (19.10) con respecto a  $t$ . De la ecuación (19.10) y las dos ecuaciones que se obtuvieron al diferenciar (19.10) dos veces con respecto a  $t$ , y al usar la relación cinemática que se desarrolló en el paso 1, se podrá determinar la posición, velocidad y aceleración de cualquier tiempo dado.

6. **En problemas que implican vibraciones torsionales** la constante de resorte torsional  $K$  se expresa en  $\text{N} \cdot \text{m/rad}$  o  $\text{lb} \cdot \text{ft/rad}$ . El producto de  $K$  y el ángulo de torsión  $\theta$  expresado en radianes produce el momento del par restaurador, el cual debe igualarse a la suma de los momentos de las fuerzas o pares efectivos con respecto al eje de rotación [problema resuelto 19.3].

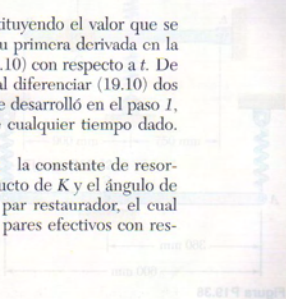


Figura P19.45



Figura P19.46



Figura P19.47



Figura P19.48

# Problemas

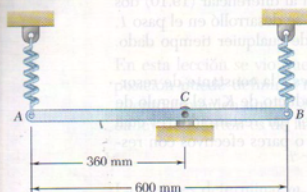


Figura P19.38

**19.38** La barra uniforme AB de 9 kg se conecta a resortes en los puntos A y B, cada uno de constante igual a 850 N/m, los cuales pueden actuar bajo tensión o compresión. Si el extremo A de la barra se baja un poco y luego se suelta, determine *a*) la frecuencia de vibración, *b*) la amplitud del movimiento angular de la barra, si la velocidad máxima del punto A es de 1.1 mm/s.

**19.39** Una barra delgada AB de 7.5 kg está remachada a un disco uniforme de 6 kg como indica la figura. Una banda se conecta al aro del disco y a un resorte que mantiene a la barra en reposo en la posición mostrada. Si el extremo A de la barra es desplazado 20 mm hacia abajo y luego se suelta, determine *a*) el periodo de vibración, *b*) la velocidad máxima del extremo A.

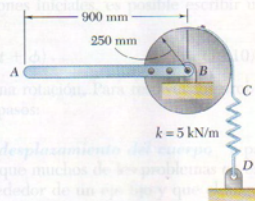


Figura P19.39

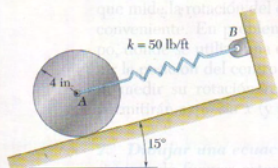


Figura P19.40

**19.40** Un cilindro uniforme de 20 lb puede rodar sin deslizarse sobre una pendiente y está unido a un resorte AB como indica la figura. Si el centro del cilindro se mueve 0.5 in. hacia abajo por la pendiente desde la posición de equilibrio y luego se le suelta desde el reposo, determine *a*) el periodo de vibración, *b*) la velocidad máxima del centro del cilindro.

**19.41** Dos barras uniformes e idénticas de 6 lb se articulan en el punto B y se conectan a un resorte de constante  $k = 23 \text{ lb/in.}$  Las barras son guiadas mediante pequeñas ruedas de masa insignificante y el sistema está en equilibrio cuando las barras se mantienen horizontales, como indica la figura. Si el punto B se baja 0.8 in. y luego se suelta, determine *a*) la frecuencia de la vibración resultante, *b*) la magnitud de la aceleración angular máxima de la barra AB.

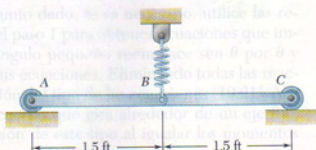


Figura P19.41



**19.42** Una barra uniforme  $AB$  de 1.2 kg se conecta a una articulación en el punto  $A$  y a dos resortes, cada uno de constante  $k = 450 \text{ N/m}$ . *a)* Determine la masa  $m$  del bloque  $C$  para el cual el periodo de pequeñas oscilaciones es de 0.6 s. *b)* Si el extremo  $B$  se baja 60 mm y luego se suelta, determine la velocidad máxima del bloque  $C$ .

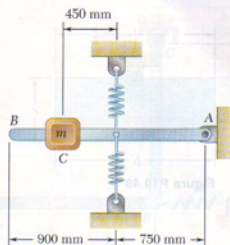


Figura P19.42

**19.43** Un cilindro uniforme de 6 kg puede rodar sin deslizarse sobre una superficie horizontal y se conecta a la barra horizontal  $AB$  de 4 kg mediante un pasador colocado en el punto  $C$ . La barra se encuentra conectada a dos resortes, cada uno de constante  $k = 5 \text{ kN/m}$ , como se muestra. Si la barra se mueve 12 mm hacia la derecha de la posición de equilibrio y luego se suelta, determine *a)* el periodo de vibración del sistema, *b)* la magnitud de la velocidad máxima de la barra  $AB$ .

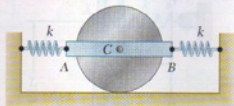


Figura P19.43 y P19.44

**19.44** Se supone que un cilindro uniforme de 6 kg rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal y se conecta mediante un pasador colocado en el punto  $C$  a la barra horizontal  $AB$  de 4 kg. Ésta se encuentra conectada a dos resortes, cada uno de constante  $k = 3.5 \text{ kN/m}$ , como indica la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre el cilindro y la superficie es de 0.5, determine la amplitud máxima del movimiento del punto  $C$  que es compatible con la suposición de rodamiento.

**19.45** Una cavidad semicircular se recorta en una placa cuadrada uniforme que se conecta a un pasador sin fricción en su centro geométrico  $O$ . Determine *a)* el periodo de pequeñas oscilaciones de la placa, *b)* la longitud de un péndulo simple que tiene el mismo periodo.

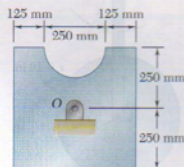


Figura P19.45

**19.46** Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de un cuarto de cilindro circular uniforme de radio  $r = 0.3 \text{ m}$ , el cual rueda sin deslizarse. [Sugerencia: Observe que  $GO = 4\sqrt{2}r/3\pi$  y que, según el teorema de los ejes paralelos,  $I = \frac{1}{2}mr^2 - m(GO)^2$ .]

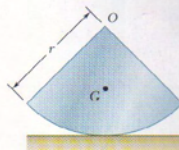


Figura P19.46

**19.47** Para la placa semicircular uniforme de radio  $r$ , determine el periodo de pequeñas oscilaciones cuando se le suspende *a)* de la posición  $A$  como indica la figura, *b)* del pasador ubicado en el punto  $B$ .

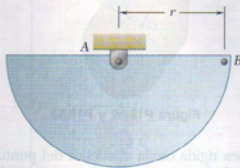


Figura P19.47

**19.48** Un alambre delgado y homogéneo se dobla en forma de triángulo isósceles de lados  $b$ ,  $b$  y  $1.6b$ . Determine el periodo de pequeñas oscilaciones si el alambre se suspende *a)* del punto  $A$  como se muestra, *b)* del punto  $B$ .

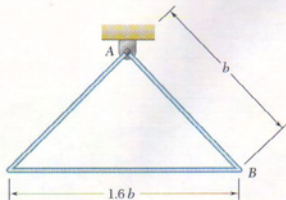


Figura P19.48

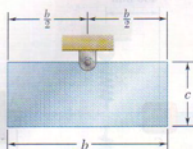


Figura P19.49

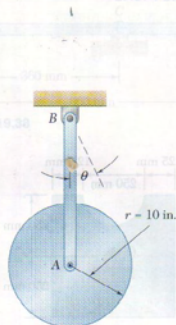


Figura P19.51

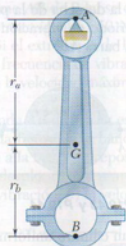


Figura P19.50

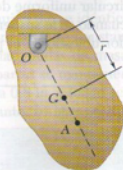


Figura P19.52 y P19.53

**19.49** Una placa rectangular uniforme se suspende de un pasador localizado en el punto medio de un borde como indica la figura. Si se considera que la dimensión  $b$  es constante, determine la razón  $c/b$  para la cual el periodo de oscilación de la placa es *a*) mínimo, *b*) el mismo que el de un péndulo simple de longitud  $c$ .

**19.50** Se ha observado que el periodo de pequeñas oscilaciones de una biela alrededor de A es de 1.03 s. Si la distancia  $r_A = 160$  mm, determine el radio de giro centroidal de la biela.

**19.51** Un disco uniforme de radio  $r = 10$  in. se conecta en A a una barra AB de 26 in. y peso insignificante que puede girar con libertad en un plano vertical alrededor de B. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones si *a*) el disco tiene la libertad de girar en un cojinete instalado en A, *b*) la barra se remacha al disco en A.

**19.52** Un péndulo compuesto se define como una placa rígida que oscila alrededor de un punto fijo O, denominado centro de suspensión. Demuestre que el periodo de oscilación de un péndulo compuesto es igual al de un péndulo simple de longitud OA, donde la distancia desde A hasta el centro de masa G es  $GA = k^2/r$ . El punto A está definido como el centro de oscilación y coincide con el centro de percusión en el problema 17.57.

**19.53** Una placa rígida oscila alrededor del punto fijo O. Demuestre que el periodo de oscilación más pequeño ocurre cuando la distancia  $\bar{r}$  desde el punto O hasta el centro de masa G es igual a  $k$ .

**19.54** Demuestre que si el péndulo compuesto del problema 19.52 se suspende de A en vez de hacerlo de O, el periodo de oscilación es el mismo de antes y el nuevo centro de oscilación se ubica en O.



**19.55** Dos barras uniformes, cada una de masa  $m$  y longitud  $l$ , se sueldan juntas para formar un ensamble tipo L. El ensamble está restringido por dos resortes, cada uno de constante  $k$ , y se encuentra en equilibrio en un plano vertical en la posición mostrada. Determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del sistema.

**19.56** Un disco uniforme de radio  $r$  y masa  $m$  puede rodar, sin deslizar, sobre una superficie cilíndrica cuando se conecta a la barra ABC de longitud  $L$  y masa insignificante. La barra se une en el punto A a un resorte de constante  $k$  y puede rodar libremente alrededor del punto B en el plano vertical. Si el extremo A se desplaza hasta una distancia pequeña y luego se suelta, determine la frecuencia de la vibración resultante en términos de  $m$ ,  $L$ ,  $k$  y  $g$ .

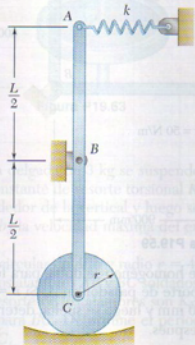


Figura P19.56

**19.57** La barra uniforme AB de 16 lb se articula en C y está unida en A a un resorte de constante  $k = 50$  lb/ft. Si el extremo A tiene un pequeño desplazamiento y luego se suelta, determine *a*) la frecuencia de las pequeñas oscilaciones, *b*) el valor mínimo de la constante del resorte  $k$  para el cual ocurrirán las oscilaciones.

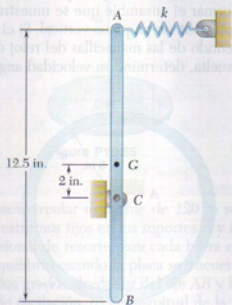


Figura P19.57

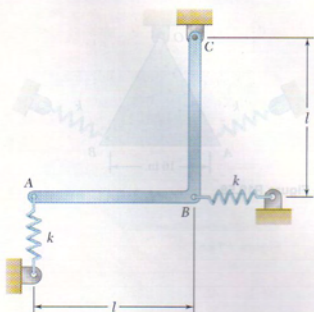


Figura P19.55



Figura P19.54

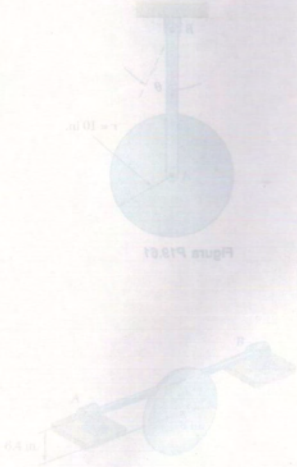


Figura P19.56

**19.66** Una placa rectangular de 120 lb se sujeta a dos barras elásticas que tienen extremos fijos en los soportes A y B como indica la figura. La constante elástica de los resortes para cada barra es de 150 lb/ft. Si el sistema está en equilibrio cuando la placa se encuentra en posición vertical, si la placa gira desde su posición de equilibrio un ángulo  $\theta$  y luego se suelta, determine *a*) el período de oscilación, *b*) la velocidad máxima del centro de masa C.

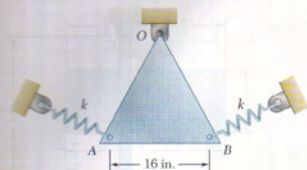


Figura P19.58

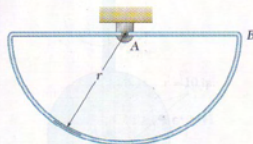


Figura P19.60

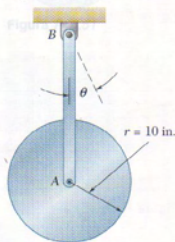


Figura P19.61

**19.58** Una placa triangular equilátera y uniforme de 20 lb se suspende de un pasador ubicado en uno de sus vértices y se conecta a dos resortes, cada uno de constante  $k = 14 \text{ lb/ft}$ . Si a la placa se le aplica un pequeño desplazamiento angular y luego se suelta, determine la frecuencia de la vibración resultante.

**19.59** Un brazo uniforme ABC de 3 kg se sostiene mediante un pasador puesto en B y se une a resortes idénticos en A y C. El sistema está en equilibrio en un plano vertical en la posición que muestra la figura. Si el punto C se empuja 15 mm hacia abajo y luego se suelta, determine la aceleración angular del brazo 0.7 s después.

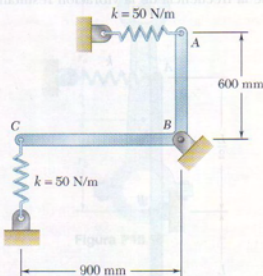


Figura P19.59

**19.60** Un alambre homogéneo se dobla para formar la figura mostrada y se conecta a un soporte de pasador en A. Si  $r = 320 \text{ mm}$  y el punto B se empuja hacia abajo 30 mm y luego se suelta, determine la magnitud de la aceleración de B 10 s después.

**19.61** Un disco uniforme de radio  $r = 10 \text{ in.}$  se conecta en A a una barra AB de 26 in. y peso insignificante que puede girar con libertad en un plano vertical alrededor de B. Si la barra se desplaza dos grados a partir de la posición mostrada y luego se suelta, determine la magnitud de la velocidad máxima del punto A, suponiendo que el disco a) tiene la libertad de girar en un cojinete colocado en A, b) se remacha a la barra en A.

**19.62** Una barra homogénea de peso por unidad de longitud igual a  $0.3 \text{ lb/ft}$  se usa para formar el ensamble que se muestra, el cual gira con libertad alrededor del pivote A en un plano vertical. Si el ensamble se desplaza dos grados en el sentido de las manecillas del reloj desde su posición de equilibrio y luego se suelta, determine su velocidad angular y la aceleración angular 5 s después.

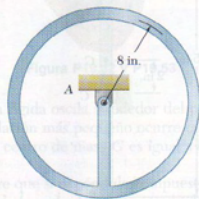


Figura P19.62



**19.63** Se observa un periodo de 4.1 s para las oscilaciones angulares de un rotor de giroscopio de 450 g suspendido de un alambre como indica la figura. Si al suspender una esfera de 50 mm en la misma forma se obtiene un periodo de 6.2 s, determine el radio de giro centroidal del rotor. (Densidad del acero =  $7850 \text{ kg/m}^3$ .)

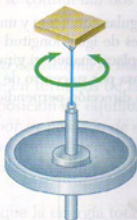


Figura P19.63

**19.64** Una barra delgada de 3 kg se suspende de un alambre de acero, el cual tiene una constante de resorte torsional  $K = 1.95 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ . Si la barra se gira  $180^\circ$  alrededor de la vertical y luego se suelta, determine a) el periodo de oscilación, b) la velocidad máxima del extremo A de la barra.

**19.65** Un disco circular de 4 lb y radio  $r = 40 \text{ in.}$  está suspendido de su centro C mediante los alambres AB y BC soldados entre sí en B. Las constantes torsionales de resorte de los alambres son  $K_1 = 3 \text{ lb} \cdot \text{ft/rad}$  para AB y  $K_2 = 1.5 \text{ lb} \cdot \text{ft/rad}$  para BC. Determine el periodo de oscilación del disco alrededor del eje AC.

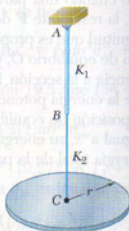


Figura P19.65

**19.66** Una placa circular uniforme de 120 lb se suelda a dos barras elásticas que tienen extremos fijos en los soportes A y B como indica la figura. La constante torsional de resorte para cada barra es de  $150 \text{ lb} \cdot \text{ft/rad}$ , y el sistema está en equilibrio cuando la placa se encuentra en posición vertical. Si la placa gira dos grados alrededor del eje AB y luego se suelta, determine a) el periodo de oscilación, b) la magnitud de la velocidad máxima del centro de masa G de la placa.

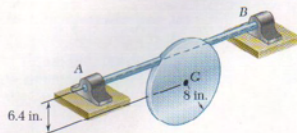


Figura P19.66

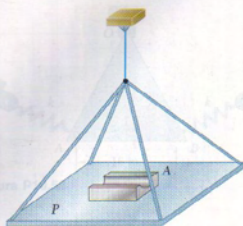


Figura P19.67

**19.67** Una plataforma horizontal  $P$  se sostiene mediante varias barras rígidas conectadas a un alambre vertical. Se encuentra que el periodo de oscilación de la plataforma corresponde a 2.2 s cuando está vacía y a 3.8 s cuando un objeto  $A$  de momento de inercia uniforme se le coloca encima con su centro de masa directamente arriba del centro de la placa. Si el alambre tiene una constante torsional  $k = 27 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ , determine el momento de inercia centroidal del objeto  $A$ .

**19.68** Una placa triangular equilátera y uniforme de lado  $b$  se suspende de tres alambres verticales de igual longitud  $l$ . Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de la placa cuando *a*) gira a un pequeño ángulo alrededor del eje vertical que pasa por su centro de masa  $G$ , *b*) se desplaza una corta distancia horizontal en dirección perpendicular a  $AB$ .

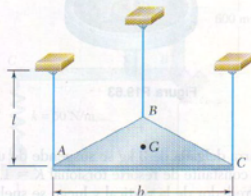


Figura P19.68

## 19.6. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En la sección 19.2 se vio que cuando una partícula de masa  $m$  está en movimiento armónico simple, la resultante  $\mathbf{F}$  de las fuerzas ejercidas sobre la partícula tiene una magnitud que es proporcional al desplazamiento  $x$ , medido desde la posición de equilibrio  $O$ , y está dirigida hacia  $O$ ; se escribió  $F = -kx$ . Con referencia a la sección 13.6, se advirtió que  $\mathbf{F}$  es una fuerza conservativa y que la energía potencial es  $V = \frac{1}{2}kx^2$ , donde  $V$  se supone igual a cero en la posición de equilibrio  $x = 0$ . Puesto que la velocidad de la partícula es igual a  $\dot{x}$ , su energía cinética es  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  y es posible expresar que la energía total de la partícula se conserva al escribir

$$T + V = \text{constante} \quad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

Al dividir entre  $m/2$  y recordar, de la sección 19.2 que  $k/m = \omega_n^2$ , donde  $\omega_n$  es la frecuencia circular natural de la vibración, se tiene

$$\dot{x}^2 + \omega_n^2 x^2 = \text{constante} \quad (19.25)$$

La ecuación (19.25) es característica de un movimiento armónico simple, puesto que puede obtenerse a partir de la ecuación (19.6) al multiplicar ambos términos por  $2\dot{x}$  e integrar.



El principio de conservación de la energía proporciona una forma conveniente de determinar el periodo de vibración de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos que poseen un solo grado de libertad, una vez que se ha establecido que el movimiento del sistema es un movimiento armónico simple o que puede aproximarse mediante un movimiento armónico simple. Al elegir una variable apropiada, como la distancia  $x$  o el ángulo  $\theta$ , se consideran dos posiciones particulares del sistema:

1. El desplazamiento del sistema es máximo; se tiene  $T_1 = 0$ , y  $V_1$  puede expresarse en términos de la amplitud  $x_m$  o  $\theta_m$  (al elegir  $V = 0$  en la posición de equilibrio).
2. El sistema pasa por su posición de equilibrio; se tiene  $V_2 = 0$ , y  $T_2$  puede expresarse en términos de la velocidad máxima o la velocidad angular máxima  $\dot{\theta}_m$ .

Se expresa entonces que la energía total del sistema se conserva y se escribe  $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ . Al recordar de (19.15) que para un movimiento armónico simple la velocidad máxima es igual al producto de la amplitud y de la frecuencia circular natural  $\omega_n$ , se encuentra que la ecuación que se obtiene puede resolverse para  $\omega_n$ .

Como ejemplo, se considera de nuevo la placa cuadrada de la sección 19.5. En la posición de desplazamiento máximo (figura 19.6a), se tiene

$$T_1 = 0 \quad V_1 = W(b - b \cos \theta_m) = Wb(1 - \cos \theta_m)$$

o puesto que  $1 - \cos \theta_m = 2 \sin^2(\theta_m/2) \approx 2(\theta_m/2)^2 = \theta_m^2/2$  para oscilaciones de pequeña amplitud,

$$T_1 = 0 \quad V_1 = \frac{1}{2}Wb\theta_m^2 \quad (19.26)$$

Cuando la placa pasa a través de su posición de equilibrio (figura 19.6b), su velocidad es máxima y se tiene

$$T_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_m^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2 = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}_m^2 \quad V_2 = 0$$

o al recordar de la sección 19.5 que  $\bar{I} = \frac{2}{3}mb^2$ ,

$$T_2 = \frac{1}{2}(\frac{5}{3}mb^2)\dot{\theta}_m^2 \quad V_2 = 0 \quad (19.27)$$

Al sustituir de (19.26) y (19.27) en  $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ , y al observar que la velocidad máxima  $\dot{\theta}_m$  es igual al producto  $\theta_m\omega_n$ , se escribe

$$\frac{1}{2}Wb\theta_m^2 = \frac{1}{2}(\frac{5}{3}mb^2)\theta_m^2\omega_n^2 \quad (19.28)$$

la cual produce  $\omega_n^2 = 3g/5b$  y

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{5b}{3g}} \quad (19.29)$$

como se obtuvo antes.

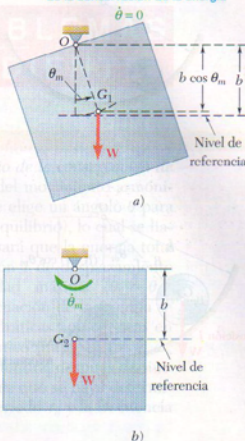
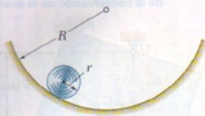
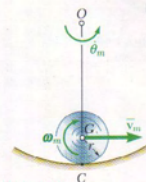
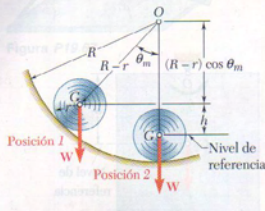


Figura 19.6



## PROBLEMA RESUELTO 19.4

Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de un cilindro de radio  $r$  que rueda sin deslizarse dentro de una superficie curva de radio  $R$ .



### SOLUCIÓN

Se denota por  $\theta$  el ángulo que forma la línea  $OG$  con la vertical. Puesto que el cilindro rueda sin deslizarse, se puede aplicar el principio de la conservación de la energía entre la posición 1, donde  $\theta = \theta_m$ , y la posición 2, donde  $\theta = 0$ .

#### Posición 1

**Energía cinética.** Puesto que la velocidad del cilindro es cero,  $T_1 = 0$ .

**Energía potencial.** Al elegir el nivel de referencia como se muestra y denotar por  $W$  el peso del cilindro, se tiene

$$V_1 = Wh = W(R-r)(1 - \cos \theta)$$

Al observar que para pequeñas oscilaciones  $(1 - \cos \theta) = 2 \sin^2 (\theta/2) \approx \theta^2/2$ , se tiene

$$V_1 = W(R-r) \frac{\theta_m^2}{2}$$

**Posición 2.** Si se denota por  $\dot{\theta}_m$  la velocidad angular de la línea  $OG$  cuando el cilindro pasa por la posición 2, y se observa que el punto  $C$  es el centro de rotación instantáneo del cilindro, se escribe

$$\bar{v}_m = (R-r) \dot{\theta}_m \quad \omega_m = \frac{v_m}{r} = \frac{R-r}{r} \dot{\theta}_m$$

#### Energía cinética

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m \bar{v}_m^2 + \frac{1}{2} I \omega_m^2 \\ &= \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m r^2 \right) \left( \frac{R-r}{r} \right)^2 \dot{\theta}_m^2 \\ &= \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}_m^2 \end{aligned}$$

#### Energía potencial

$$V_2 = 0$$

#### Conservación de la energía

$$\begin{aligned} T_1 + V_1 &= T_2 + V_2 \\ 0 + W(R-r) \frac{\theta_m^2}{2} &= \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}_m^2 + 0 \end{aligned}$$

Puesto que  $\dot{\theta}_m = \omega_m \theta_m$  y  $W = mg$ , se escribe

$$mg(R-r) \frac{\theta_m^2}{2} = \frac{3}{4} m (R-r)^2 (\omega_m \theta_m)^2 \quad \omega_m^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{R-r}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{R-r}{g}}$$



## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas siguientes se pedirá que utilice el *principio de la conservación de la energía* para determinar el periodo o frecuencia natural del movimiento armónico simple de una partícula o cuerpo rígido. Suponiendo que elige un ángulo  $\theta$  para definir la posición del sistema (con  $\theta = 0$  en la posición de equilibrio), lo cual se hará en la mayoría de los problemas de esta lección, se expresará que la energía total del sistema se conserva,  $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ , entre la posición 1 de desplazamiento máximo ( $\theta_1 = \theta_m$ ,  $\dot{\theta}_1 = 0$ ) y la posición 2 de velocidad máxima ( $\theta_2 = \theta_m$ ,  $\dot{\theta}_2 = 0$ ). Se tiene que  $T_1$  y  $V_2$  serán ambas cero, y que la ecuación de la energía se reducirá a  $V_1 = T_2$ , donde  $V_1$  y  $T_2$  son las expresiones cuadráticas homogéneas en  $\theta_m$  y  $\dot{\theta}_m$ , respectivamente. Como, para un movimiento armónico simple,  $\dot{\theta}_m = \theta_m \omega_n$  y al sustituir este producto en la ecuación de la energía se obtendrá, después de simplificar, una ecuación que es posible resolver para  $\omega_n^2$ . Una vez que se haya determinado la frecuencia circular natural  $\omega_n$ , puede obtenerse el periodo  $\tau_n$  y la frecuencia natural  $f_n$  de la vibración.

Los pasos que se deben seguir son éstos:

**1. Calcular la energía potencial  $V_1$  del sistema en su posición de desplazamiento máximo.** Dibuje un bosquejo del sistema en su posición de desplazamiento máximo y exprese la energía potencial de todas las fuerzas implicadas (internas, así como externas) en términos del desplazamiento máximo  $x_m$  o  $\theta_m$ .

**a) La energía potencial asociada con el peso  $W$  de un cuerpo es  $V_g = Wy$ ,** donde  $y$  es la elevación del centro de gravedad  $G$  del cuerpo sobre su posición de equilibrio. Si el problema que se resuelve implica la oscilación de un cuerpo rígido alrededor de un eje horizontal que pasa por el punto  $O$  localizado a una distancia  $b$  de  $G$  (figura 19.6), exprese  $y$  en términos del ángulo  $\theta$  que la línea del ángulo  $OC$  forma con la vertical:  $y = b(1 - \cos \theta)$ . Pero, para pequeños valores de  $\theta$ , es posible sustituir esta expresión con  $y = \frac{1}{2}b\theta^2$  [problema resuelto 19.4]. Por lo tanto, cuando  $\theta$  alcanza su valor máximo  $\theta_m$ , y para oscilaciones de pequeña amplitud, es posible expresar  $V_g$  como

$$V_g = \frac{1}{2}Wb\theta_m^2$$

Observe que si  $G$  se localiza sobre  $O$  en su posición de equilibrio (y no debajo de  $O$ , como se ha supuesto), el desplazamiento vertical  $y$  será negativo y deberá aproximarse como  $y = -\frac{1}{2}b\theta^2$ , el cual resultará en un valor negativo de  $V_g$ . En ausencia de otras fuerzas, la posición de equilibrio será inestable, y el sistema no oscilará. (Véase, por ejemplo, el problema 19.91.)

**b) La energía potencial asociada con la fuerza elástica ejercida por un resorte es  $V_e = \frac{1}{2}kx^2$ ,** donde  $k$  es la constante del resorte y  $x$  es su deformación. En problemas que implican la rotación de un cuerpo alrededor de un eje, por lo general se tendrá  $x = a\theta$ , donde  $a$  es la distancia desde el eje de rotación hasta el punto del cuerpo donde el resorte está conectado, y donde  $\theta$  es el ángulo de rotación. Por

(continúa)

lo tanto, cuando  $x$  alcanza su valor máximo  $x_m$  y  $\theta$  llega a su valor máximo  $\theta_m$ , es posible expresar  $V_e$  como

$$V_e = \frac{1}{2} k x_m^2 = \frac{1}{2} k a^2 \theta_m^2$$

c) **La energía potencial  $V_1$  del sistema en su posición de desplazamiento máximo** se obtiene sumando las diversas energías potenciales que se han calculado. Será igual al producto de una constante y  $\theta_m^2$ .

2. **Calcular la energía cinética  $T_2$  del sistema en su posición de velocidad máxima.** Observe que esta posición es también la posición de equilibrio del sistema.

a) **Si el sistema está compuesto por un solo cuerpo rígido**, la energía cinética  $T_2$  del sistema será la suma de la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masa  $G$  del cuerpo y la energía cinética asociada con la rotación del cuerpo alrededor de  $G$ . Por lo tanto, se escribirá

$$T_2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_m^2 + \frac{1}{2} I \omega_m^2$$

Suponiendo que la posición del cuerpo se ha definido mediante un ángulo  $\theta$ , exprese  $\bar{v}_m$  y  $\omega_m$  en términos de la razón de cambio  $\dot{\theta}_m$  de  $\theta$  cuando el cuerpo pase por su posición de equilibrio. La energía cinética del cuerpo se expresará entonces como el producto de una constante y  $\dot{\theta}_m^2$ . Advierta que si  $\theta$  mide la rotación del cuerpo alrededor de su centro de masa, como fue el caso para la placa de la figura 19.6, entonces  $\omega_m = \dot{\theta}_m$ . En otros casos, sin embargo, la cinemática del movimiento debe utilizarse para derivar una relación entre  $\omega_m$  y  $\dot{\theta}_m$  [problema resuelto 19.4].

b) **Si el sistema está compuesto de varios cuerpos rígidos**, repita el cálculo anterior para cada uno de los cuerpos, utilizando la misma coordenada  $\theta$ , y sume los resultados que se obtienen.

3. **Igual la energía potencial  $V_1$  del sistema a su energía cinética  $T_2$ ,**

$$V_1 = T_2$$

y, recordando la primera de las ecuaciones (19.15), sustituya  $\dot{\theta}_m$  en el término del lado derecho por el producto de la amplitud  $\theta_m$  y la frecuencia circular  $\omega_n$ . Puesto que ambos términos contienen ahora al factor  $\theta_m^2$ , es posible cancelar este último y la ecuación resultante puede resolverse para la frecuencia circular  $\omega_n$ .



# Problemas

**19.69** Dos bloques, cada uno de 1.5 kg de masa, se conectan a eslabones que están unidos mediante un pasador a la barra  $BC$  en la forma indicada. Las masas de los eslabones y la barra son insignificantes, y los bloques pueden deslizarse sin fricción. El bloque  $D$  está unido a un resorte de constante  $k = 720 \text{ N/m}$ . Si el bloque  $A$  se mueve 15 mm desde su posición de equilibrio y luego se suelta, determine la magnitud de la velocidad máxima del bloque  $D$  durante el movimiento resultante.

**19.70** Dos bloques, cada uno de 1.5 kg de masa, se conectan a eslabones que están unidos mediante un pasador a la barra  $BC$  en la forma indicada. Las masas de los eslabones y la barra son insignificantes, y los bloques pueden deslizarse sin fricción. El bloque  $D$  está unido a un resorte de constante  $k = 720 \text{ N/m}$ . Si el bloque  $A$  está en reposo cuando se le golpea horizontalmente con un mazo y se le aplica una velocidad inicial de 250 mm/s, determine la magnitud del desplazamiento máximo del bloque  $D$  durante el movimiento resultante.

**19.71** Dos pequeñas esferas,  $A$  y  $C$ , cada una de masa  $m$ , están conectadas a una barra  $AB$ , la cual se sostiene mediante un pasador y una ménsula colocados en  $B$  y por medio de un resorte  $CD$  de constante  $k$ . Si la masa de la barra es insignificante y el sistema se encuentra en equilibrio cuando la barra está en posición horizontal, determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del sistema.

**19.72** Un bloque de 20 lb está unido al resorte  $A$  y conectado al resorte  $B$  mediante una cuerda y una polea. El bloque se sostiene en la posición mostrada con los dos resortes sin deformar cuando el soporte se retira y el bloque se suelta sin velocidad inicial. Si se ignora la fricción y las masas de la polea y los resortes, determine *a*) el periodo de la vibración resultante, *b*) la magnitud de la velocidad máxima alcanzada por el bloque.

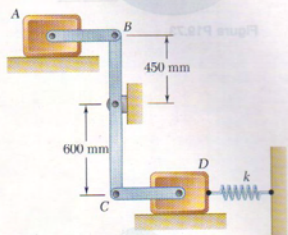


Figura P19.69 y P19.70

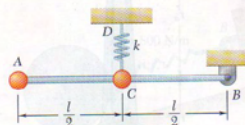


Figura P19.71

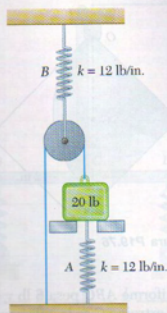


Figura P19.72

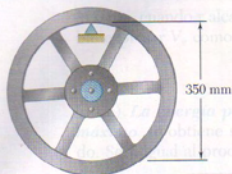


Figura P19.73

**19.73** El borde interno de un volante de 38 kg se coloca sobre el filo de un cuchillo, y se encuentra que el periodo de pequeñas oscilaciones es de 1.26 s. Determine el momento de inercia centrodial del volante.

**19.74** Una barra uniforme AB puede girar en un plano vertical alrededor de un eje horizontal en C localizado a una distancia  $c$  por encima del centro de masa G de la barra. Para oscilaciones pequeñas, determine el valor de  $c$  para el cual la frecuencia del movimiento será máxima.

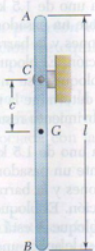


Figura P19.74

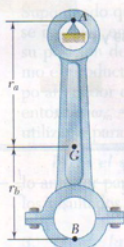


Figura P19.75

**19.75** Una biela está soportada por el filo de un cuchillo en el punto A; se observa que el periodo de sus oscilaciones pequeñas es de 0.895 s. Luego se invierte la biela y se le sostiene mediante el filo del cuchillo en el punto B, y en este caso el periodo de sus oscilaciones pequeñas es de 0.805 s. Si  $r_a + r_b = 10.5$  in., determine a) la ubicación del centro de masa G, b) el radio de giro centrodial  $k$ .

**19.76** Una placa uniforme y delgada que se recorta en forma de un cuarto de círculo puede girar en un plano vertical alrededor de un eje horizontal en el punto O. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de la placa.

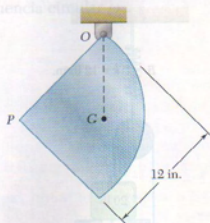


Figura P19.76

**19.77** Una barra uniforme ABC pesa 6 lb y está unida a dos resortes como indica la figura. Si al extremo C se le aplica un pequeño desplazamiento y luego se suelta, determine la frecuencia de vibración de la barra.

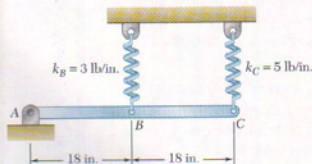


Figura P19.77



**19.78** Un disco uniforme de radio  $r$  y masa  $m$  puede rodar sin deslizarse sobre una superficie cilíndrica y está conectado a una barra ABC de longitud  $L$  y masa insignificante. La barra está unida a un resorte de constante  $k$  y puede rodar con libertad en el plano vertical alrededor del punto B. Si al extremo A se le aplica un pequeño desplazamiento y luego se suelta, determine la frecuencia de las oscilaciones resultantes en términos de  $m$ ,  $L$ ,  $k$  y  $g$ .

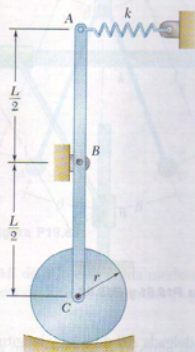


Figura P19.78

**19.79** Un cilindro uniforme de 7 kg puede rodar sin deslizarse sobre una rampa y está conectado a un resorte AB como se muestra. Si el centro del cilindro se mueve 10 mm hacia abajo de la rampa y luego se suelta, determine *a*) el periodo de vibración, *b*) la velocidad máxima del centro del cilindro.

**19.80** Dos barras uniformes, cada una de masa  $m = 0.6$  kg y longitud  $l = 160$  mm, se sueldan entre sí para formar el ensamble mostrado. Si la constante de cada resorte es  $k = 120$  N/m y al extremo A se le aplica un pequeño desplazamiento y luego se suelta, determine la frecuencia del movimiento resultante.

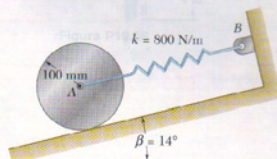


Figura P19.79

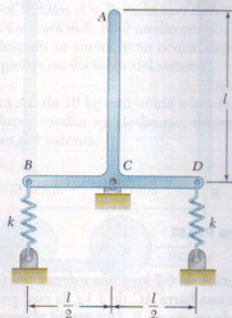


Figura P19.80

**19.81** Una barra delgada  $AB$  de 10 kg y longitud  $l = 0.6$  m se une a dos collarines de masa insignificante. El collarín  $A$  se une a un resorte de constante  $k = 1.5$  kN/m y puede deslizarse por una barra horizontal, en tanto que el collarín  $B$  puede deslizarse libremente por una barra vertical. Si el sistema está en equilibrio cuando la barra  $AB$  está vertical y al collarín  $A$  se le aplica un pequeño desplazamiento y luego se le suelta, determine el período de las vibraciones resultantes.

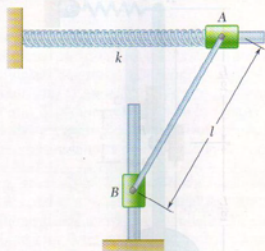


Figura P19.81 y P19.82

**19.82** Una barra delgada  $AB$  de 5 kg y longitud  $l = 0.6$  m se conecta a dos collarines, cada uno de 2.5 kg de masa. El collarín  $A$  se une a un resorte de constante  $k = 1.5$  kN/m y puede deslizarse por una barra horizontal, en tanto que el collarín  $B$  puede deslizarse libremente por una barra vertical. Si el sistema está en equilibrio cuando la barra  $AB$  es vertical y al collarín  $A$  se le aplica un pequeño desplazamiento y luego se le suelta, determine el período de las vibraciones resultantes.

**19.83** Tres barras ligeras, uniformes e idénticas, de 3.6 kg se unen mediante pasadores en la forma que se indica y pueden moverse en un plano vertical. Si a la barra  $BC$  se le aplica un pequeño desplazamiento y después se le suelta, determine el período de vibración del sistema.

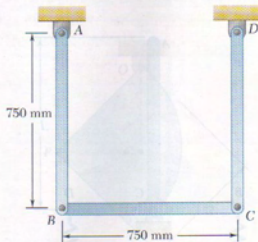


Figura P19.83

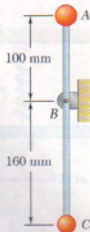


Figura P19.84

**19.84** Una esfera  $A$  de 0.7 kg y una esfera  $C$  de 0.5 kg están conectadas a los extremos de una barra  $AC$  de 1 kg, la cual puede girar en un plano vertical alrededor de un eje en  $B$ . Determine el período de pequeñas oscilaciones de la barra.



**19.85** Las esferas A y C, cada una de peso  $W$ , se conectan a los extremos de una barra homogénea del mismo peso  $W$  y de longitud  $2l$ , la cual se dobla como indica la figura. Se permite que el sistema oscile alrededor de un pasador sin fricción en B. Si  $\beta = 40^\circ$  y  $l = 25$  in., determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones.

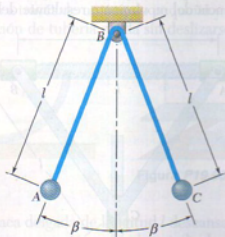


Figura P19.85

**19.86** La barra AB de 3 lb está unida mediante pernos a un disco de 5 lb. Si el disco rueda sin deslizarse, determine el período de pequeñas oscilaciones del sistema.

**19.87** Dos discos uniformes de 6 kg están unidos a la barra AB de 9 kg como indica la figura. Si la constante del resorte es de 5 kN/m y los discos ruedan sin deslizarse, determine la frecuencia de vibración del sistema.

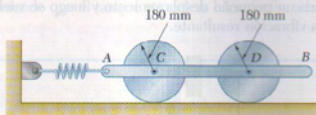


Figura P19.87

**19.88** Una media sección de un cilindro uniforme de radio  $r$  y masa  $m$  descansa sobre dos rodillos A y B, cada uno de los cuales es un cilindro uniforme de radio  $r/4$  y masa  $m/8$ . Si el medio cilindro se gira a través de un ángulo pequeño y después se suelta, y no ocurre deslizamiento, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.

**19.89** La barra AB de 10 kg está unida a los dos discos de 4 kg como se muestra. Si los discos ruedan sin deslizarse, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.

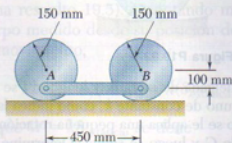


Figura P19.89

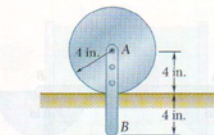


Figura P19.86

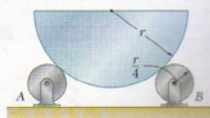


Figura P19.88

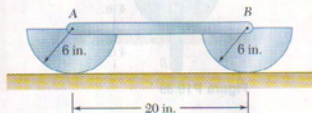


Figura P19.91

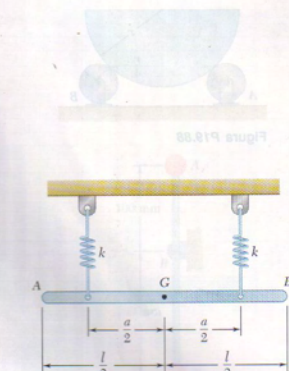


Figura P19.93

**19.90** Tres collarines, cada uno de masa  $m$ , se conectan mediante pasadores a las barras AC y BC de longitud  $l$  y masa insignificante. Los collarines A y B pueden deslizarse sin fricción por una barra horizontal y se conectan mediante un resorte de constante  $k$ . El collarín C puede deslizarse sin fricción por una barra vertical, y el sistema se encuentra en equilibrio en la posición mostrada. Si al collarín C se le aplica un pequeño desplazamiento y luego se suelta, determine la frecuencia del movimiento resultante del sistema.

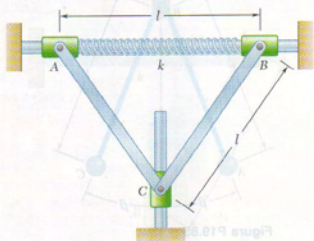


Figura P19.90

**19.91** Dos placas semicirculares uniformes de 6 lb están conectadas a la barra AB de 4 lb como se muestra. Si las placas ruedan sin deslizarse, determine el período de pequeñas oscilaciones del sistema.

**19.92** Un disco uniforme de 6 lb puede rodar sin deslizarse sobre una superficie cilíndrica y está conectado a una barra ligera y uniforme AB de 4 lb. La barra se encuentra unida a un resorte de constante  $k = 20$  lb/ft y puede girar libremente en un plano vertical alrededor del punto A. Si al extremo B se le aplica un pequeño desplazamiento y luego se suelta, determine el período de la vibración resultante.

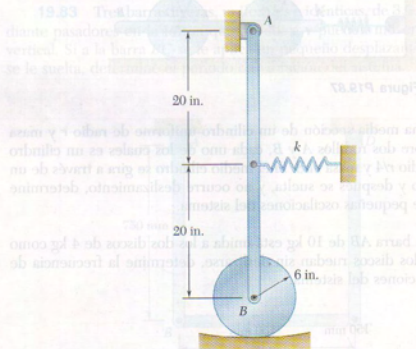


Figura P19.92

**19.93** Una barra delgada de masa  $m$  y longitud  $l$  se suspende de dos resortes verticales, cada uno de constante  $k$ , como indica la figura. La barra está en equilibrio cuando se le aplica una pequeña rotación alrededor de un eje horizontal a través de G y luego se suelta. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones.



**19.94** Una sección de un tubo uniforme se suspende de dos cables verticales conectados en A y B. Determine la frecuencia de oscilación cuando al tubo se le aplica un pequeño giro alrededor del eje centroidal  $OO'$  y luego se suelta.

**19.95** Una media sección de tubería se coloca sobre una superficie horizontal, luego se gira a través de un ángulo pequeño y después se suelta. Suponiendo que la sección de tubería rueda sin deslizarse, determine el periodo de oscilación.

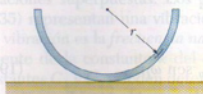


Figura P19.95

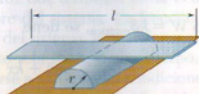


Figura P19.96

**\*19.96** Una placa delgada de longitud  $l$  descansa sobre medio cilindro de radio  $r$ . Obtenga una expresión para el periodo de pequeñas oscilaciones de la placa.

**\*19.97** Cuando un cuerpo sumergido se mueve entre un fluido, las partículas de éste fluyen alrededor del cuerpo y así adquieren energía cinética. En el caso de una esfera que se mueve en un fluido ideal, la energía cinética total adquirida por el fluido es  $\frac{1}{2}(\gamma/g)Vv^2$ , donde  $\gamma$  es el peso específico del fluido,  $V$  el volumen de la esfera, y  $v$  la velocidad de la esfera. Considere un cascarón esférico hueco de 1 lb y 4 in. de radio que se mantiene sumergido en un tanque de agua mediante un resorte de constante igual a 40 lb/ft. a) Sin tomar en cuenta la fricción del fluido, determine el periodo de vibración del cascarón cuando éste se desplaza verticalmente y luego se suelta. b) Resuelva el inciso a), suponiendo que el tanque se acelera hacia arriba a la razón constante de 24 ft/s<sup>2</sup>.

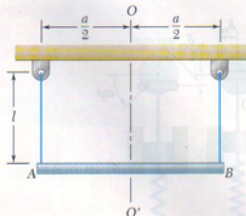


Figura P19.94

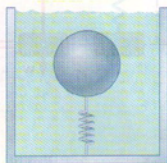


Figura P19.97

## 19.7. VIBRACIONES FORZADAS

Las vibraciones más importantes desde el punto de vista de las aplicaciones de ingeniería son las *vibraciones forzadas* de un sistema. Éstas ocurren cuando un sistema se sujeta a una fuerza periódica o cuando se le conecta elásticamente a un soporte que tiene un movimiento alternativo.

Considere primero el caso de un cuerpo de masa  $m$  suspendido de un resorte y sujeto a una fuerza periódica  $\mathbf{P}$  de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$ , donde  $\omega_f$  es la frecuencia circular de  $\mathbf{P}$  y se conoce como *frecuencia circular forzada* del movimiento (figura 19.7). Esta fuerza puede ser una fuerza externa real aplicada al cuerpo o una fuerza centrífuga producida por la rotación de alguna parte desbalanceada del cuerpo (vea el problema resuelto 19.5). Denotando mediante  $x$  el desplazamiento del cuerpo medido desde su posición de equilibrio, se escribe la ecuación de movimiento,

$$+\downarrow \Sigma F = ma: \quad P_m \sin \omega_f t + W - k(\delta_{\text{estática}} + x) = m\ddot{x}$$

Si se recuerda que  $W = k\delta_{\text{estática}}$ , se tiene

$$m\ddot{x} + kx = P_m \sin \omega_f t \quad (19.30)$$

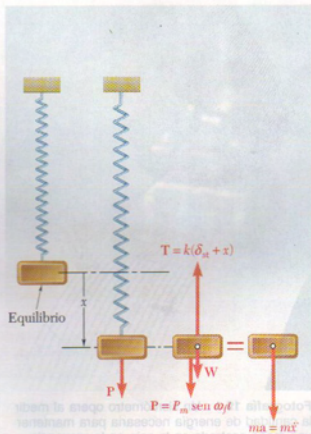


Figura 19.7

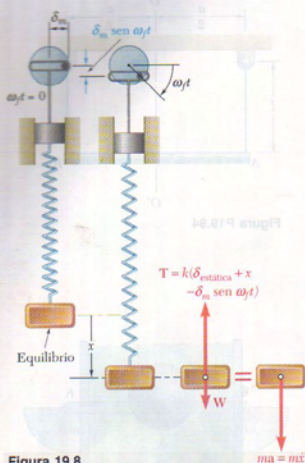
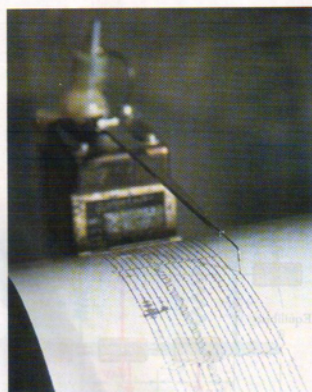


Figura 19.8



Fotografía 19.1 Un sísmómetro opera al medir la cantidad de energía necesaria para mantener una masa centrada en la caja en la presencia de una fuerte sacudida del suelo.

A continuación se considera el caso de un cuerpo de masa  $m$  suspendido de un resorte unido a un soporte móvil cuyo desplazamiento  $\delta$  es igual a  $\delta_m \sin \omega_f t$  (figura 19.8). Al medir el desplazamiento  $x$  del cuerpo desde la posición de equilibrio estático correspondiente a  $\omega_f t = 0$ , se encuentra que la elongación total del resorte en el tiempo  $t$  es  $\delta_{\text{estático}} + x - \delta_m \sin \omega_f t$ . La ecuación de movimiento es entonces

$$+\downarrow \Sigma F = ma: \quad W - k(\delta_{\text{estático}} + x - \delta_m \sin \omega_f t) = m\ddot{x}$$

Como  $W = k\delta_{\text{estático}}$ , se tiene

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \sin \omega_f t \quad (19.31)$$

Nótese que las ecuaciones (19.30) y (19.31) son de la misma forma y que una solución de la primera ecuación satisfará a la segunda si se deja que  $P_m = k\delta_m$ .

Una ecuación diferencial tal como (19.30) o (19.31), que posee un miembro del lado derecho diferente de cero, se dice que es *no homogénea*. Su solución general se obtiene al sumar una solución particular de la ecuación dada a la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (con el miembro del lado derecho igual a cero). Una *solución particular* de (19.30) o (19.31) puede obtenerse al tratar una solución de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \sin \omega_f t \quad (19.32)$$

Al sustituir  $x_{\text{part}}$  por  $x$  en la ecuación (19.30), se obtiene

$$-m\omega_f^2 x_m \sin \omega_f t + kx_m \sin \omega_f t = P_m \sin \omega_f t$$

que puede resolverse para la amplitud,

$$x_m = \frac{P_m}{k - m\omega_f^2}$$

Puesto que, de acuerdo con la ecuación (19.4),  $k/m = \omega_n^2$ , donde  $\omega_n$  es la frecuencia circular natural del sistema, se escribe

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.33)$$

Al sustituir de (19.32) en (19.31), se obtiene de manera similar

$$x_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.33')$$

La ecuación homogénea correspondiente a (19.30) o (19.31) es la ecuación (19.2), que define la vibración libre del cuerpo. Su solución general, denominada *función complementaria* se encontró en la sección 19.2:

$$x_{\text{comp}} = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t \quad (19.34)$$



Al sumar la solución particular (19.32) a la función complementaria (19.34), se obtiene la *solución general* de las ecuaciones (19.30) y (19.31):

$$x = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t + x_m \sin \omega_f t \quad (19.35)$$

Hay que observar que las vibraciones obtenidas consisten en dos vibraciones superpuestas. Los primeros dos términos en la ecuación (19.35) representan una vibración libre del sistema. La frecuencia de esta vibración es la *frecuencia natural* del sistema, la cual depende únicamente de la constante  $k$  del resorte y la masa  $m$  del cuerpo, y las constantes  $C_1$  y  $C_2$  pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales. Esta vibración libre también se denomina como vibración *transitoria*, ya que en la práctica real se ve amortiguada de inmediato por las fuerzas de fricción (sección 19.9).

El último término en (19.35) representa la vibración de *estado estable* producida y mantenida por la fuerza aplicada o por el movimiento aplicado del apoyo o soporte. Su frecuencia es la *frecuencia forzada* impuesta por esta fuerza o movimiento, y su amplitud  $x_m$ , definida por (19.33) o (19.33'), depende de la *razón de frecuencias*  $\omega_f/\omega_n$ . La razón de la amplitud  $x_m$  de la vibración de estado estable a la deflexión estática  $P_m/k$  causada por una fuerza  $P_m$ , o a la amplitud  $\delta_m$  de movimiento del apoyo, se llama *factor de amplificación*. A partir de las ecuaciones (19.33) y (19.33'), se obtiene

$$\text{Factor de amplificación} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.36)$$

En la figura 19.9 se ha graficado el factor de amplificación en función de la razón de frecuencia  $\omega_f/\omega_n$ . Se advierte que cuando  $\omega_f = \omega_n$ , la amplitud de la vibración forzada se vuelve infinita. Se dice que la fuerza aplicada o el movimiento aplicado por el apoyo está en *resonancia* con el sistema dado. En realidad, la amplitud de la vibración permanece finita debido a fuerzas de amortiguamiento (sección 19.9); sin embargo, una situación de este tipo debe evitarse, y la frecuencia forzada no debe elegirse demasiado cercana a la frecuencia natural del sistema. También se pudo observar que para  $\omega_f < \omega_n$  el coeficiente de  $\sin \omega_f t$  en (19.35) es positivo, en tanto que para  $\omega_f > \omega_n$  este coeficiente es negativo. En el primer caso la vibración forzada está *en fase* con la fuerza aplicada o el movimiento aplicado por el apoyo, mientras que en el segundo caso está a  $180^\circ$  *fuera de fase*.

Por último, se advirtió que la velocidad y la aceleración en la vibración de estado estable pueden obtenerse al diferenciar dos veces con respecto a  $t$  el último término de la ecuación (19.35). Sus valores máximos se dan mediante expresiones similares a las de las ecuaciones (19.15) de la sección 19.2, salvo que estas expresiones incluyen la hora, la amplitud y la frecuencia circular de la vibración forzada:

$$v_m = x_m \omega_f \quad a_m = x_m \omega_f^2 \quad (19.37)$$

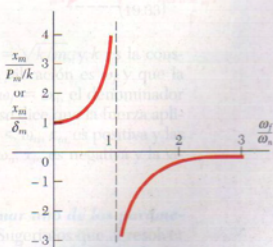
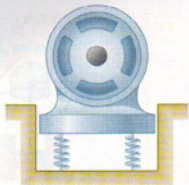


Figura 19.9



## PROBLEMA RESUELTO 19.5

Un motor de 350 lb se sostiene mediante cuatro resortes, cada uno con una constante de 750 lb/in. El desbalanceo del rotor es equivalente a un peso de 1 oz ubicado a 6 in. del eje de rotación. Si el motor está restringido a moverse verticalmente, determine *a*) la velocidad en rpm a la cual ocurrirá la resonancia, *b*) la amplitud de la vibración del motor a la velocidad de 1 200 rpm.

## SOLUCIÓN

**a) Velocidad de resonancia.** La velocidad de resonancia es igual a la frecuencia circular natural  $\omega_n$  (en rpm) de la vibración libre del motor. La masa del motor y la constante equivalente de los resortes de soporte son

$$m = \frac{350 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 10.87 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

$$k = 4(750 \text{ lb/in.}) = 3000 \text{ lb/in.} = 36000 \text{ lb/ft}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{36000}{10.87}} = 57.5 \text{ rad/s} = 549 \text{ rpm}$$

Velocidad de resonancia = 549 rpm ◀

**b) Amplitud de la vibración a 1 200 rpm.** La velocidad angular del motor y la masa del peso equivalente de 1 oz son

$$\omega = 1\,200 \text{ rpm} = 125.7 \text{ rad/s}$$

$$m = (1 \text{ oz}) \frac{1 \text{ lb}}{16 \text{ oz}} \frac{1}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.001941 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

La magnitud de la fuerza centrífuga debida al desbalanceo del rotor es

$$P_m = m_a n = m r \omega^2 = (0.001941 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}) \left(\frac{6}{12} \text{ ft}\right) (125.7 \text{ rad/s})^2 = 15.33 \text{ lb}$$

La deflexión estática que provocaría una carga constante  $P_m$  es

$$\frac{P_m}{k} = \frac{15.33 \text{ lb}}{3000 \text{ lb/in.}} = 0.00511 \text{ in.}$$

La frecuencia circular forzada  $\omega_f$  del movimiento es la velocidad angular del motor,

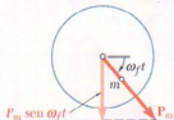
$$\omega_f = \omega = 125.7 \text{ rad/s}$$

Al sustituir los valores de  $P_m/k$ ,  $\omega_f$  y  $\omega_n$  en la ecuación (19.33), se obtiene

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} = \frac{0.00511 \text{ in.}}{1 - (125.7/57.5)^2} = -0.001352 \text{ in.}$$

$$x_m = 0.001352 \text{ in. (fuera de fase)} \quad \blacktriangleleft$$

**Nota.** Como  $\omega_f > \omega_n$ , la vibración está 180° fuera de fase con la fuerza centrífuga debida al desbalanceo del rotor. Por ejemplo, cuando la masa desbalanceada está directamente abajo del eje de rotación, la posición del motor es  $x_m = 0.001352 \text{ in.}$  sobre la posición de equilibrio.





## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección se dedicó al análisis de las **vibraciones forzadas** de un sistema mecánico. Estas vibraciones ocurren cuando el sistema se somete a una fuerza periódica **P** (figura 19.7), o cuando está conectado elásticamente a un soporte que tiene un movimiento alternante (figura 19.8). En el primer caso, el movimiento del sistema se define mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = P_m \sin \omega_f t \quad (19.30)$$

donde el miembro del lado derecho representa la magnitud de la fuerza **P** en un instante determinado. En el segundo caso, el movimiento se define mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \sin \omega_f t \quad (19.31)$$

donde el miembro del lado derecho es el producto de la constante de resorte **k** y el desplazamiento del soporte en un instante dado. El interés se concentrará sólo en el movimiento de **estado estable** del sistema, el cual se define mediante una **solución particular** de estas ecuaciones, de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \sin \omega_f t \quad (19.32)$$

**1. Si la vibración forzada resulta de una fuerza periódica **P****, de amplitud  $P_m$  y frecuencia circular  $\omega_f$ , la amplitud de la vibración es

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.33)$$

donde  $\omega_n$  es la **frecuencia circular natural** del sistema  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ , y **k** es la constante de resorte. Advierta que la frecuencia circular de la vibración es  $\omega_f$  y que la amplitud  $x_m$  no depende de las condiciones iniciales. Para  $\omega_f = \omega_n$ , el denominador en la ecuación (19.33) es cero y  $x_m$  es infinita (figura 19.9); se dice que la fuerza aplicada **P** está en **resonancia** con el sistema. Además, para  $\omega_f < \omega_n$ ,  $x_m$  es positiva y las vibraciones están **en fase** con **P**, mientras que, para  $\omega_f > \omega_n$ ,  $x_m$  es negativa y la vibración está **fuera de fase**.

**a) En los problemas que siguen se pedirá determinar uno de los parámetros de la ecuación (19.33) cuando se conocen los demás.** Sugierimos que al resolver este problema se tenga siempre enfrente la figura 19.9. Por ejemplo, si se pide determinar la frecuencia a la cual la amplitud de una vibración forzada tiene un valor determinado, pero no se sabe si la vibración está en o fuera de fase con respecto a la fuerza aplicada, en la figura 19.9 se observa que es posible que existan dos frecuencias que satisfagan este requerimiento, una que corresponde al valor positivo de  $x_m$  y a una vibración en fase con la fuerza aplicada, y la otra correspondiente a un valor negativo de  $x_m$  y a una vibración fuera de fase con la fuerza aplicada.

(continúa)

b) Una vez que se ha obtenido la amplitud  $x_m$  del movimiento de una componente del sistema con la ecuación (19.33), puede recurrirse a las ecuaciones (19.33) para determinar los valores máximos de la velocidad y la aceleración de esa componente:

$$v_m = x_m \omega_f \quad a_m = x_m \omega_f^2 \quad (19.37)$$

c) Cuando la fuerza aplicada  $P$  se debe al desbalance del rotor de un motor, su valor máximo es  $P_m = m r \omega_f^2$ , donde  $m$  es la masa del rotor,  $r$  es la distancia entre su centro de masa y el eje de rotación, y  $\omega_f$  es igual a la velocidad  $\omega$  angular del rotor expresada en rad/s [problema resuelto 19.5].

2. Si la vibración forzada la provoca un movimiento armónico simple de un soporte, de amplitud  $\delta_m$  y frecuencia circular  $\omega_f$ , la amplitud de la vibración es

$$x_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.33')$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia circular natural del sistema,  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ . También en este caso advierte que la frecuencia circular de la vibración es  $\omega_f$  y que la amplitud  $x_m$  no depende de las condiciones iniciales.

a) Asegúrese de leer nuestros comentarios en los párrafos 1, 1a y 1b, ya que éstos se aplican igualmente bien a una vibración provocada por el movimiento de un soporte.

b) Si se especifica la aceleración máxima  $a_m$  del soporte, más que su desplazamiento máximo  $\delta_m$ , recuerde que, ya que el movimiento del soporte es armónico simple, es posible utilizar la relación  $a_m = \delta_m \omega_f^2$  para determinar  $\delta_m$ ; el valor obtenido se sustituye entonces en la ecuación (19.33').



# Problemas

19.111 En el problema 19.110, determine el rango de valores de  $\omega_f$  para el cual la amplitud de la vibración del collarín es menor que 10 mm.

**19.98** Un collarín de 4 kg puede deslizarse por una barra horizontal sin fricción y se conecta a un resorte de constante igual a 450 N/m. Sobre el collarín actúa una fuerza periódica de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$ , donde  $P_m = 13$  N. Determine la amplitud del movimiento del collarín si a)  $\omega_f = 5$  rad/s, b)  $\omega_f = 10$  rad/s.

**19.99** Un collarín de 4 kg puede deslizarse por una barra horizontal sin fricción y se conecta a un resorte de constante  $k$ . Sobre el collarín actúa una fuerza periódica de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$ , donde  $P_m = 9$  N y  $\omega_f = 5$  rad/s. Determine el valor de la constante de resorte  $k$  si el movimiento del collarín tiene una amplitud de 150 mm y está a) en fase con la fuerza aplicada, b) fuera de fase con la fuerza aplicada.

**19.100** Un collarín de masa  $m$  que se desliza por una barra horizontal sin fricción se conecta a un resorte de constante  $k$ , y sobre él actúa una fuerza periódica de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$ . Determine el intervalo de valores de  $\omega_f$  para el cual la amplitud de la vibración excede tres veces la deflexión estática causada por una fuerza constante de magnitud  $P_m$ .

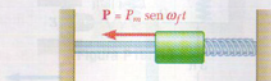


Figura P19.98, P19.99 y P19.100

**19.101** Un pequeño bloque A de 40 lb se conecta a la barra BC de masa insignificante sostenida en B mediante un pasador y una ménsula y en C por medio de un resorte de constante  $k = 140$  lb/ft. El sistema puede moverse en un plano vertical y está en equilibrio cuando la barra se encuentra en posición horizontal. Sobre la barra actúa en C una fuerza periódica  $P$  de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$ , donde  $P_m = 1.4$  lb. Si  $b = 8$  in., determine el intervalo de valores de  $\omega_f$  para el cual la amplitud de vibración del bloque A sobrepasa de 0.14 in.

**19.102** Un pequeño bloque A de 40 lb se conecta a la barra BC de masa insignificante sostenida en B mediante un pasador y una ménsula y en C por medio de un resorte de constante  $k = 140$  lb/ft. El sistema puede moverse en un plano vertical y está en equilibrio cuando la barra se encuentra en posición horizontal. Sobre la barra actúa en C una fuerza periódica  $P$  de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$ , donde  $P_m = 1.4$  lb. Si  $\omega_f = 15$  rad/s, determine el intervalo de valores de  $b$  para los cuales la amplitud de la vibración del bloque A es mayor a 0.14 in.

**19.103** La plomada de 1.2 kg de un péndulo simple de longitud  $l = 600$  mm se suspende de un collarín C de 1.4 kg. Si sobre el collarín actúa una fuerza periódica  $P = P_m \sin \omega_f t$ , donde  $P_m = 0.5$  N y  $\omega_f = 3$  rad/s, determine la amplitud y fase del movimiento de la plomada.

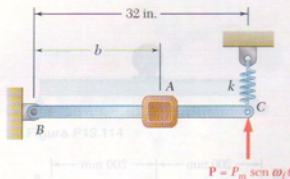


Figura P19.101 y P19.102

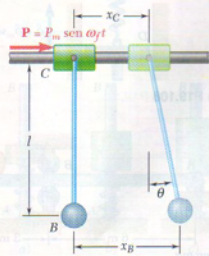


Figura P19.103

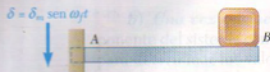


Figura P19.104

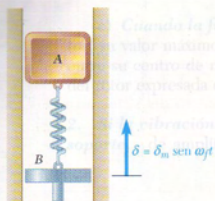


Figura P19.105 y P19.106

**19.104** Una viga en voladizo  $AB$  soporta un bloque que provoca una deflexión estática de 40 mm en  $B$ . Suponiendo que el soporte colocado en  $A$  experimenta un desplazamiento periódico vertical  $\delta = \delta_m \sin \omega t$ , donde  $\delta_m = 10$  mm, determine el intervalo de valores de  $\omega$  para el cual la amplitud del movimiento del bloque será menor a 20 mm. Ignore la masa de la viga y suponga que el bloque no sobresale de ésta.

**19.105** Un bloque  $A$  de 2 kg se desliza por una ranura vertical sin fricción y se conecta a un soporte móvil  $B$  mediante un resorte  $AB$  de constante  $k = 117$  N/m. Si el desplazamiento del soporte es  $\delta = \delta_m \sin \omega t$ , donde  $\delta_m = 100$  mm y  $\omega = 5$  rad/s, determine *a*) la amplitud del movimiento del bloque, *b*) la amplitud de la fuerza fluctuante que ejerce el resorte sobre el bloque.

**19.106** Un bloque  $A$  de 16 lb se desliza por una ranura vertical sin fricción y se conecta a un soporte móvil  $B$  mediante un resorte  $AB$  de constante  $k = 130$  lb/ft. Si el desplazamiento del soporte es  $\delta = \delta_m \sin \omega t$ , donde  $\delta_m = 6$  in., determine el intervalo de valores  $\omega$  para los cuales la amplitud de la fuerza fluctuante que ejerce el resorte sobre el bloque es menor a 30 lb.

**19.107** Un bloque  $A$  de 5 lb está unido a un resorte de constante  $k = 4$  lb/ft y a una barra  $BCD$  de peso insignificante. La barra está conectada en  $D$  a un soporte móvil  $E$  por medio de un resorte idéntico. Si el soporte  $E$  realiza un desplazamiento  $\delta = \delta_m \sin \omega t$ , donde  $\delta_m = 0.2$  in. y  $\omega = 10$  rad/s, determine *a*) la magnitud de la aceleración máxima del bloque  $A$ , *b*) la magnitud de la fuerza máxima transmitida al soporte en  $C$ .

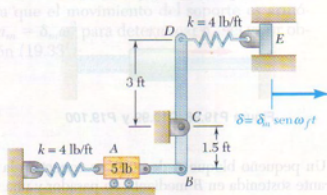


Figura P19.107

**19.108** Una pequeña esfera  $B$  de 2 kg se conecta a la barra  $AB$  de peso insignificante, la cual se sostiene en  $A$  mediante un pasador y una menzula y se conecta en  $C$  a un soporte móvil  $D$  por medio de un resorte de constante  $k = 3.6$  kN/m. Si el soporte  $D$  experimenta un desplazamiento vertical  $\delta = \delta_m \sin \omega t$ , donde  $\delta_m = 3$  mm y  $\omega = 15$  rad/s, determine *a*) la magnitud de la máxima velocidad angular de la barra  $AB$ , *b*) la magnitud de la aceleración máxima de la esfera  $B$ .

**19.109** Una viga  $ABC$  se sostiene mediante una conexión de pasador en  $A$  y por medio de rodillos en  $B$ . Un bloque de 120 kg colocado sobre el extremo de la viga ocasiona una deflexión estática de 15 mm en  $C$ . Suponiendo que el soporte en  $A$  experimenta un desplazamiento periódico vertical  $\delta = \delta_m \sin \omega t$ , donde  $\delta_m = 10$  mm y  $\omega = 15$  rad/s, y el soporte en  $B$  no se mueve, determine la aceleración máxima del bloque en  $C$ . No tome en cuenta el peso de la viga y suponga que el bloque nunca se separa de ésta.

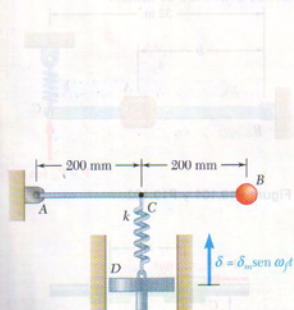


Figura P19.108

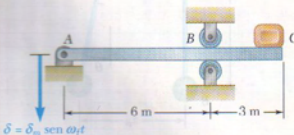


Figura P19.109



**19.110** Un péndulo simple de longitud  $l$  se suspende de un collarín  $C$  que es forzado a moverse de manera horizontal de acuerdo con la relación  $x_c = \delta_m \sin \omega_f t$ . Determine el rango de valores de  $\omega_f$  para la cual la amplitud del movimiento de la plomada es menor que  $\delta_m$ . (Suponga que  $\delta_m$  es pequeño comparado con la longitud  $l$  del péndulo.)

**19.111** En el problema 19.110, determine el rango de valores de  $\omega_f$  para la cual la amplitud de movimiento de la plomada excede  $2\delta_m$ .

**19.112** Un motor de 200 kg se sostiene mediante soportes que tienen una constante total de 215 kN/m. El desbalance del rotor es equivalente a una masa de 30 g ubicada a 200 mm del eje de rotación. Determine el intervalo de valores permisibles de la velocidad del motor si la amplitud de la vibración no superará los 1.5 mm.

**19.113** Un motor de 18 kg de masa se sostiene mediante cuatro resortes, cada uno de constante igual a 40 kN/m. El motor está restringido a moverse verticalmente, y se observa que la amplitud de su movimiento es de 1.5 mm a una velocidad de 1200 rpm. Si la masa del rotor es de 4 kg, determine la distancia entre el centro de masa del rotor y el eje de la flecha.

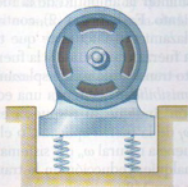


Figura P19.113

**19.114** Un motor de 360 lb está atornillado a una viga horizontal ligera. El desequilibrio de su rotor es equivalente a un peso de 0.9 oz ubicado a 7.5 in. del eje de rotación, y la deflexión estática de la viga debida al peso del motor es de 0.6 in. La amplitud de la vibración debida al desbalance puede disminuirse agregando una placa a la base del motor. Si la amplitud de la vibración debe ser menor a  $2.16 \times 10^{-3}$  in. para velocidades del motor mayores de 300 rpm, determine el peso de la placa requerido.



Figura P19.114

**19.115** Un motor de masa  $M$  se sostiene mediante resortes cuya constante de resorte equivalente es  $k$ . El desequilibrio de su rotor equivale a una masa  $m$  ubicada a la distancia  $r$  del eje de rotación. Demuestre que cuando la velocidad angular del rotor es  $\omega_f$ , la amplitud  $x_m$  del movimiento del motor es

$$x_m = \frac{r(m/M)(\omega_f/\omega_n)^2}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2}$$

donde  $\omega_n = \sqrt{k/M}$ .

**19.116** La barra  $AB$  está unida rigidamente al marco de un motor que funciona a velocidad constante. Cuando un collarín de masa  $m$  se coloca sobre el resorte, se observa que éste vibra con amplitud de 15 mm. Si dos collarines, cada uno de masa  $m$ , se colocan sobre el resorte, se observa que la amplitud es de 18 mm. ¿Qué amplitud de vibración debería esperarse cuando se colocan tres collarines, cada uno de masa  $m$ , sobre el resorte? (Obtenga dos respuestas.)

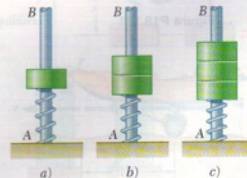


Figura P19.116

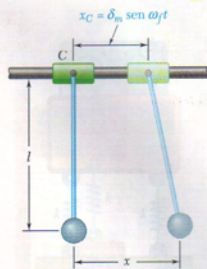


Figura P19.110

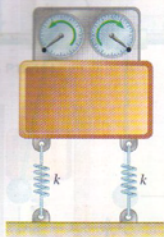


Figura P19.119

**19.117** Resuelva el problema 19.116, suponiendo que la velocidad del motor ha sido cambiada y que un collarín tiene una amplitud de 9 mm y dos de ellos tienen amplitud de 3 mm.

**19.118** El desbalance del rotor de un motor de 400 lb es equivalente a un peso de 0.8 oz localizado a 6 in. del eje de rotación. Si el motor está sostenido por medio de cuatro resortes, cada uno de constante igual a 5 kips/ft, determine el rango de valores permisibles de la velocidad del motor si la aceleración vertical máxima del mismo no debe exceder de  $0.4 \text{ ft/s}^2$ .

**19.119** Un excitador de masa excéntrica utilizado para contar giros, y que consiste en dos masas giratorias de 3.5 oz que describen círculos de radio  $r$  a la misma velocidad pero en sentidos opuestos, se instala sobre un elemento de máquina para inducir una vibración de estado estable del elemento. El peso total del sistema es de 600 lb, la constante de cada resorte es  $k = 3400 \text{ lb/in.}$ , y la velocidad rotacional del excitador corresponde a 1200 rpm. Si la amplitud de la fuerza fluctuante total ejercida sobre el cimiento es de 36 lb, determine el radio  $r$ .

**19.120** Las figuras (1) y (2) muestran cómo es posible utilizar resortes para sostener un bloque en dos situaciones diferentes. En la figura (1), los resortes ayudan a disminuir la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida por el bloque al cimiento. En la figura (2), contribuyen a la disminución de la amplitud del desplazamiento fluctuante que transmite el cimiento al bloque. El cociente de la fuerza transmitida y la fuerza aplicada o el cociente entre el desplazamiento transmitido y el desplazamiento que se genera recibe el nombre de *transmisibilidad*. Obtenga una ecuación para la transmisibilidad en cada situación. Indique su respuesta en términos de la razón  $\omega_f/\omega_n$  de la frecuencia  $\omega_f$  de la fuerza aplicada, o el desplazamiento que se genera respecto a la frecuencia natural  $\omega_n$  del sistema resorte-masa. Demuestre que para provocar cualquier reducción en la transmisibilidad, el cociente  $\omega_f/\omega_n$  debe ser mayor que  $\sqrt{2}$ .

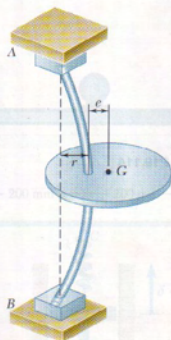


Figura P19.121

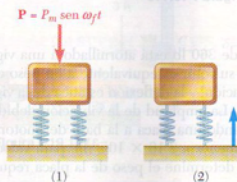


Figura P19.120

**19.121** Un disco de 27 kg está conectado, con una excentricidad  $e = 150 \mu\text{m}$ , al punto medio de una flecha vertical  $AB$  que gira a velocidad angular constante  $\omega_f$ . Si la constante de resorte  $k$  para movimiento horizontal de un disco es de 580 kN/m, determine *a*) la velocidad angular  $\omega_f$  a la cual ocurrirá resonancia, *b*) la deflexión  $r$  de la flecha cuando  $\omega_f = 1200 \text{ rpm}$ .

**19.122** Un pequeño remolque y su carga pesan en total 500 lb. El remolque se sostiene por medio de dos resortes, cada uno de constante igual a 350 lb/ft y se jala sobre un camino cuya superficie puede aproximarse por medio de una curva senoidal con amplitud de 2 in. y longitud de onda de 15 ft (esto es, la distancia entre crestas sucesivas es de 15 ft y la distancia vertical de cresta a seno es de 4 in). Determine *a*) la velocidad a la cual ocurrirá la resonancia, *b*) la amplitud de la vibración de remolque a una velocidad de 30 mi/h.

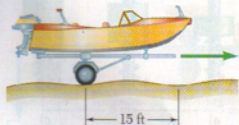


Figura P19.122



**19.123** El bloque A puede moverse sin fricción en la ranura como se muestra y sobre él actúa una fuerza periódica vertical de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$ , donde  $\omega_f = 2 \text{ rad/s}$  y  $P_m = 5 \text{ lb}$ . Un resorte de constante  $k$  se conecta a la parte inferior del bloque A y a un bloque B de 44 lb. Determine a) el valor de la constante  $k$  que evitará una vibración de estado estable del bloque A, b) la amplitud correspondiente de la vibración del bloque B.

**19.124** Un vibrómetro, utilizado para medir la amplitud de vibraciones, consiste en una caja que contiene un sistema masa-resorte cuya frecuencia natural conocida es de 150 Hz. La caja está rígidamente unida a una superficie que se mueve de acuerdo con la ecuación  $y = \delta_m \sin \omega_f t$ . Si la amplitud  $z_m$  del movimiento de la masa relativa a la caja se utiliza como una medida de la amplitud  $\delta_m$  de la vibración de la superficie, determine a) el error porcentual cuando la frecuencia de la vibración es de 750 Hz, b) la frecuencia a la cual el error es cero.

**19.125** Cierta acelerómetro está compuesto esencialmente por una caja que contiene un sistema masa-resorte cuya frecuencia natural conocida es de 1760 Hz. La caja está rígidamente unida a una superficie que se mueve de acuerdo con la ecuación  $y = \delta_m \sin \omega_f t$ . Si la amplitud  $z_m$  del movimiento de la masa relativa a la caja por un factor de escala  $\omega_n^2$  se utiliza como una medida de la aceleración máxima  $a_m = \delta_m \omega_f^2$  de la superficie vibrante, determine el error porcentual cuando la frecuencia de la vibración es de 480 Hz.

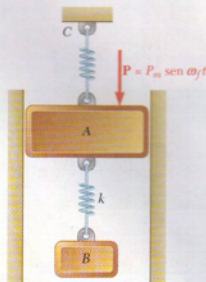


Figura P19.123

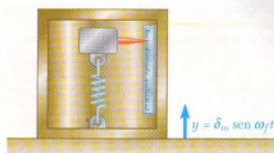


Figura P19.124 y P19.125

## VIBRACIONES AMORTIGUADAS

### \*19.8. VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

Los sistemas vibratorios considerados en la primera parte de este capítulo se supusieron libres de amortiguamiento. En realidad, todas las vibraciones se amortiguan en cierto grado gracias a las fuerzas de fricción. Estas fuerzas pueden deberse a *fricción seca* o a *fricción de Coulomb*, entre cuerpos rígidos, a *fricción fluida*, cuando un cuerpo rígido se mueve en un fluido, o a *fricción interna* entre las moléculas de un cuerpo aparentemente elástico.

Un tipo de amortiguamiento de interés especial es el *amortiguamiento viscoso* ocasionado por fricción o rozamiento de un fluido a velocidades bajas y moderadas. El amortiguamiento viscoso se caracteriza por el hecho de que la fuerza de fricción es *directamente proporcional y opuesta a la velocidad* del cuerpo en movimiento. Como ejemplo, considérese de nuevo un cuerpo de masa  $m$  suspendido de un resorte de constante  $k$ , donde se supondrá que el cuerpo está conectado al émbolo de un amortiguador (figura 19.10). La magnitud de la fuerza de fricción que ejerce el fluido de los alrededores sobre el émbolo es igual a  $c\dot{x}$ , donde la constante  $c$ , expresada en  $\text{N} \cdot \text{s/m}$  o  $\text{lb} \cdot \text{s/ft}$  y que se conoce como *coeficiente de amortiguamiento viscoso*, depende de las propiedades físicas del fluido y de la construcción del amortiguador. La ecuación de movimiento es

$$+ \downarrow \Sigma F = m\ddot{x}; \quad W - k(\delta_{st} + x) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

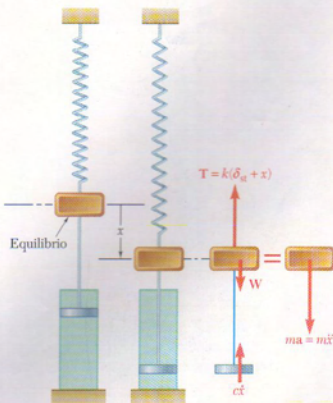


Figura 19.10

Cuando  $W = k\delta_{st}$ , se escribe

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (19.38)$$

Al sustituir  $x = e^{\lambda t}$  en (19.38) y dividir entre  $e^{\lambda t}$  se escribe la *ecuación característica*

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (19.39)$$

y se obtienen las raíces

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (19.40)$$

Al definir el *coeficiente de amortiguamiento crítico*  $c$ , como el valor de  $c$  que hace que el radical en la ecuación (19.40) se iguale a cero, se escribe

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \quad (19.41)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia circular natural del sistema en ausencia de amortiguamiento. Se pueden distinguir tres casos diferentes de amortiguamiento, dependiendo del valor del coeficiente  $c$ .

1. **Sobreamortiguamiento o amortiguamiento fuerte:**  $c > c_c$ . Las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la ecuación característica (19.39) son reales y distintas, y la solución general de la ecuación diferencial (19.38) es

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (19.42)$$

Esta solución corresponde a un movimiento no vibratorio. Puesto que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son ambas negativas,  $x$  tiende a cero cuando  $t$  aumenta de manera indefinida. Sin embargo, el sistema en realidad vuelve a su posición de equilibrio después de un tiempo finito.

2. **Amortiguamiento crítico:**  $c = c_c$ . La ecuación característica tiene una doble raíz  $\lambda = -c_c/2m = -\omega_n$ , y la solución general de (19.38) es

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \quad (19.43)$$

El movimiento que se obtiene es otra vez no vibratorio. Los sistemas críticamente amortiguados son de especial interés en aplicaciones de ingeniería, pues vuelven a su posición de equilibrio en el tiempo más corto posible sin oscilación.

3. **Subamortiguamiento o amortiguamiento débil:**  $c < c_c$ . Las raíces de la ecuación (19.39) son complejas y conjugadas, y la solución general de (19.38) es de la forma

$$x = e^{-(c/2m)t} (C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) \quad (19.44)$$



donde  $\omega_d$  se define por la relación

$$\omega_d^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2$$

Al sustituir  $k/m = \omega_n^2$  y recordar (19.41), se escribe

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \quad (19.45)$$

donde la constante  $c/c_c$  se conoce como el *factor de amortiguamiento*. Aun cuando el movimiento en realidad no se repite a sí mismo, la constante  $\omega_d$  se conoce comúnmente como la *frecuencia circular* de la vibración amortiguada. Una sustitución similar a la que se utilizó en la sección 19.2 permite escribir la solución general de la ecuación (19.38) en la forma

$$x = x_0 e^{-(c/2m)t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (19.46)$$

El movimiento definido por la ecuación (19.46) es vibratorio con amplitud decreciente (figura 19.11), y el intervalo de tiempo  $\tau_d = 2\pi/\omega_d$  que separa dos puntos sucesivos donde la curva definida por la ecuación (19.46) toca una de las curvas límite que se muestran en la figura 19.11 se conoce comúnmente como el *periodo de vibración amortiguada*. De acuerdo con la ecuación (19.45), se observa que  $\omega_d < \omega_n$  y, por ello, que  $\tau_d$  es más grande que el periodo de vibración  $\tau_n$  del sistema no amortiguado correspondiente.

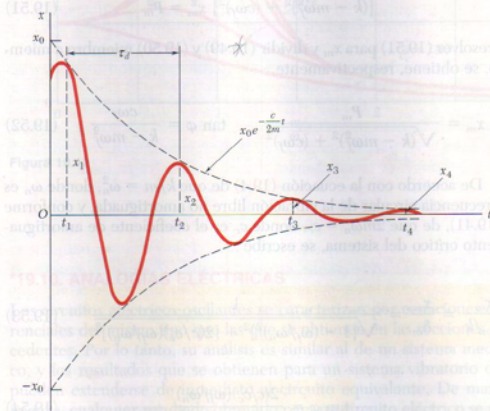
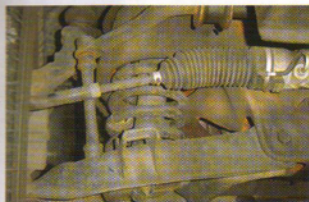


Figura 19.11



**Fotografía 19.2** La suspensión de automóvil está compuesta, en esencia, por un resorte y un amortiguador, el cual provocará que la carrocería se someta a vibraciones forzadas amortiguadas cuando el vehículo sea conducido sobre un camino disparejo.

## \*19.9. VIBRACIONES FORZADAS AMORTIGUADAS

Si el sistema considerado en la sección anterior está sujeto a una fuerza periódica  $\mathbf{P}$  de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$ , la ecuación de movimiento se convierte en

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \sin \omega_f t \quad (19.47)$$

La solución general de (19.47) se obtiene al sumar una solución particular de (19.47) a la función complementaria o solución general de la ecuación homogénea (19.38). La función complementaria está dada por (19.42), (19.43) o (19.44), según el tipo de amortiguamiento considerado. Esto representa un movimiento *transitorio* que finalmente se amortigua.

El interés en esta sección se centra en la vibración de estado estable representada por una solución particular de (19.47) de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \sin(\omega_f t - \varphi) \quad (19.48)$$

Al sustituir  $x_{\text{part}}$  en vez de  $x$  en (19.47), se obtiene

$$-m\omega_f^2 x_m \sin(\omega_f t - \varphi) + c\omega_f x_m \cos(\omega_f t - \varphi) + kx_m \sin(\omega_f t - \varphi) = P_m \sin \omega_f t$$

Al hacer  $\omega_f t - \varphi$  sucesivamente igual a 0 y a  $\pi/2$ , se escribe

$$c\omega_f x_m = P_m \sin \varphi \quad (19.49)$$

$$(k - m\omega_f^2) x_m = P_m \cos \varphi \quad (19.50)$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de (19.49) y (19.50) y sumar, resulta

$$[(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2] x_m^2 = P_m^2 \quad (19.51)$$

Al resolver (19.51) para  $x_m$  y dividir (19.49) y (19.50) miembro a miembro, se obtiene, respectivamente,

$$x_m = \frac{P_m}{\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}} \quad \tan \varphi = \frac{c\omega_f}{k - m\omega_f^2} \quad (19.52)$$

De acuerdo con la ecuación (19.4) de que  $k/m = \omega_n^2$ , donde  $\omega_n$  es la frecuencia circular de la vibración libre no amortiguada, y conforme a (19.41), de que  $2m\omega_n = c_c$ , donde  $c_c$  es el coeficiente de amortiguamiento crítico del sistema, se escribe

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \quad (19.53)$$

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.54)$$



La fórmula (19.53) expresa el factor de amplificación en función de la razón de frecuencias  $\omega_f/\omega_n$  y del factor de amortiguamiento  $c/c_c$ . Es posible usarla para determinar la amplitud de la vibración de estado estable producida por una fuerza aplicada de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$  o por el movimiento de apoyo aplicado  $\delta = \delta_m \sin \omega_f t$ . La fórmula (19.54) define en términos de los mismos parámetros la diferencia de fase  $\varphi$  entre la fuerza aplicada o el movimiento del apoyo aplicado y la vibración de estado estable resultante del sistema amortiguado. El factor de amplificación se ha graficado en función de la razón de frecuencias en la figura 19.12 para diferentes valores del factor de amortiguamiento. Se observa que la amplitud de una vibración forzada puede mantenerse pequeña al elegir un alto coeficiente de amortiguamiento viscoso  $c$  o al mantener alejadas las frecuencias natural y forzada.

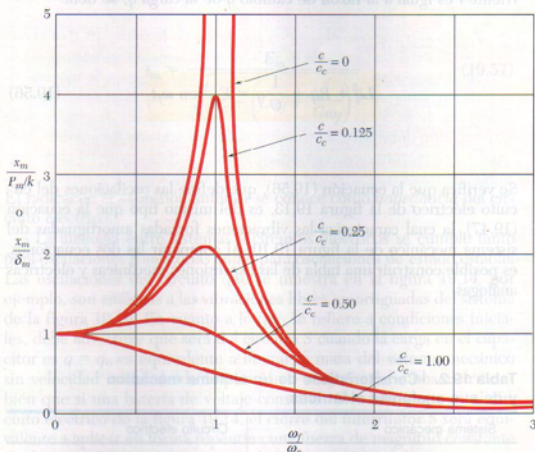


Figura 19.12

### \*19.10. ANALOGÍAS ELÉCTRICAS

Los circuitos eléctricos oscilantes se caracterizan por ecuaciones diferenciales del mismo tipo que las que se obtienen en las secciones precedentes. Por lo tanto, su análisis es similar al de un sistema mecánico, y los resultados que se obtienen para un sistema vibratorio dado pueden extenderse de inmediato al circuito equivalente. De manera inversa, cualquier resultado obtenido para un circuito eléctrico se aplicará también al sistema mecánico correspondiente.

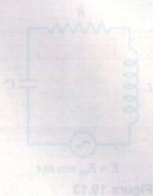


Figura 19.14

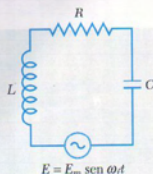


Figura 19.13

Fotografía 19.2 La suspensión de automóvil está compuesta, en esencia, por un resorte y un amortiguador, al cual provocamos que le carguemos se someta a vibraciones forzadas amortiguadas cuando el vehículo sea conducido sobre un camino desigual.

Considere un circuito eléctrico compuesto por un inductor de inductancia  $L$ , un resistor de resistencia  $R$  y un capacitor de capacitancia  $C$  conectado en serie con una fuente de voltaje alterno  $E = E_m \sin \omega t$  (figura 19.13). De la teoría elemental de circuitos<sup>1</sup> se sabe que si  $i$  denota la corriente en el circuito y  $q$  la carga eléctrica en el capacitor, la caída de potencial es  $L(di/dt)$  a través del inductor,  $Ri$  a través del resistor y  $q/C$  a través del capacitor. Al expresar que la suma algebraica del voltaje aplicado y de las caídas de potencial alrededor del circuito cerrado es cero, se escribe

$$E_m \sin \omega t - L \frac{di}{dt} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \quad (19.55)$$

El interés en esta sección se centra en la vibración de estado estacionario representada por una solución particular de (19.55) de la forma

Al reordenar los términos y recordar que en cualquier instante la corriente  $i$  es igual a la razón de cambio  $\dot{q}$  de la carga  $q$ , se tiene

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_m \sin \omega t \quad (19.56)$$

Se verifica que la ecuación (19.56), que define las oscilaciones del circuito eléctrico de la figura 19.13, es del mismo tipo que la ecuación (19.47), la cual caracteriza las vibraciones forzadas amortiguadas del sistema mecánico de la figura 19.10. Al comparar las dos ecuaciones, es posible construir una tabla de las expresiones mecánicas y eléctricas análogas.

**Tabla 19.2. Características de un sistema mecánico y de sus analogías eléctricas**

Sistema mecánico	Circuito eléctrico
$m$ Masa	$L$ Inductancia
$c$ Coeficiente de amortiguamiento viscoso	$R$ Resistencia
$k$ Constante de resorte	$1/C$ Recíproco de la capacitancia
$x$ Desplazamiento	$q$ Carga
$v$ Velocidad	$i$ Corriente
$P$ Fuerza aplicada	$E$ Voltaje aplicado

<sup>1</sup>Véase C. R. Paul, S. A. Nasar y L. E. Unnewehr, *Introduction to Electrical Engineering*, 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1992.



La tabla 19.2 puede utilizarse para extender los resultados que se obtuvieron en las secciones anteriores para diversos sistemas mecánicos a sus análogos eléctricos. Por ejemplo, la amplitud  $i_m$  de la corriente en el circuito de la figura 19.13 se obtiene al notar que corresponde al valor máximo  $v_m$  de la velocidad en el sistema mecánico análogo. De acuerdo con la primera de las ecuaciones (19.37),  $v_m = x_m \omega_f$ , si se sustituye  $x_m$  de la ecuación (19.52) y se reemplazan las constantes del sistema mecánico con expresiones eléctricas correspondientes, se tiene

$$i_m = \frac{\omega_f E_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega_f^2\right)^2 + (R\omega_f)^2}}$$

$$i_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_f - \frac{1}{C\omega_f}\right)^2}} \quad (19.57)$$

El radical en la expresión anterior se conoce como *impedancia* del circuito eléctrico.

La analogía entre sistemas y circuitos eléctricos se cumple tanto para oscilaciones transitorias como para oscilaciones de estado estable. Las oscilaciones del circuito que se muestra en la figura 19.14, por ejemplo, son análogas a las vibraciones libres amortiguadas del sistema de la figura 19.10. En cuanto a lo que se refiere a condiciones iniciales, debe advertirse que será del circuito S cuando la carga en el capacitor es  $q = q_0$  es equivalente a liberar la masa del sistema mecánico sin velocidad inicial desde la posición  $x = x_0$ . Se debe observar también que si una batería de voltaje constante  $E$  se introduce en el circuito eléctrico de la figura 19.14, el cierre del interruptor S será equivalente a aplicar en forma repentina una fuerza de magnitud constante  $P$  a la masa del sistema mecánico de la figura 19.10.

El análisis anterior sería de valor cuestionable si el único resultado fuera hacer posible que los estudiantes de mecánica analizaran circuitos eléctricos sin aprender los elementos de la teoría de circuitos. Se espera que este análisis sirva, en cambio, de motivación para que los estudiantes apliquen en la solución de problemas de vibraciones mecánicas las técnicas matemáticas que quizás aprendieron en los últimos cursos de teoría de circuitos. Sin embargo, el valor principal del concepto de la analogía eléctrica reside en su aplicación en *métodos experimentales* para la determinación de las características de un sistema mecánico determinado. De hecho, un circuito eléctrico se construye con mayor facilidad que un modelo mecánico, y el hecho de que sus características puedan modificarse al variar la inductancia, la resistencia o la capacidad de sus diferentes componentes hace que el uso de la analogía eléctrica resulte particularmente conveniente.

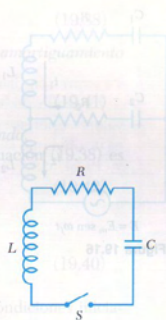


Figura 19.14

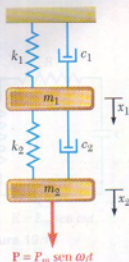


Figura 19.15

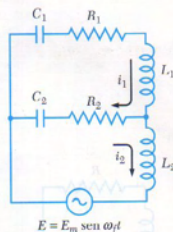


Figura 19.16

Para determinar la analogía eléctrica de un sistema mecánico determinado, hay que centrar la atención en cada masa en movimiento del sistema y observar qué resortes, amortiguadores o fuerzas externas se le aplican directamente. Después es posible construir un circuito eléctrico equivalente para duplicar cada una de las unidades mecánicas definidas de esa forma; los diferentes circuitos que se obtienen de ese modo formarán en conjunto el circuito deseado. Considérese, por ejemplo, el sistema mecánico de la figura 19.15. Se observa que sobre la masa  $m_1$  actúan dos resortes de constantes  $k_1$  y  $k_2$  y dos amortiguadores caracterizados por los coeficientes de amortiguamiento viscoso  $c_1$  y  $c_2$ . El circuito eléctrico debe incluir consecuentemente un lazo consistente en un inductor de inductancia  $L_1$  proporcional a  $m_1$ , de dos capacitores de capacitancia  $C_1$  y  $C_2$  inversamente proporcionales a  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente, y de dos resistores de resistencia  $R_1$  y  $R_2$ , proporcionales de forma respectiva a  $c_1$  y  $c_2$ . Puesto que sobre la masa  $m_2$  actúa el resorte  $k_2$  y el amortiguador  $c_2$ , así como la fuerza  $P = P_m \sin \omega t$ , el circuito debe incluir también un lazo que contenga al capacitor  $C_2$ , al resistor  $R_2$ , al nuevo inductor  $L_2$  y a la fuente de voltaje  $E = E_m \sin \omega t$  (figura 19.16).

Para confirmar que el sistema mecánico de la figura 19.15 y el circuito eléctrico de la figura 19.16 satisfacen en realidad las mismas ecuaciones diferenciales, se deducirán primero las ecuaciones de movimiento para  $m_1$  y  $m_2$ . Al denotar, respectivamente, por  $x_1$  y  $x_2$  los desplazamientos de  $m_1$  y  $m_2$  de sus posiciones de equilibrio, se observa que la elongación del resorte  $k_1$  (medida desde la posición de equilibrio) es igual a  $x_1$ , en tanto que la elongación del resorte  $k_2$  es igual al desplazamiento relativo  $x_2 - x_1$  de  $m_2$  con respecto a  $m_1$ . Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para  $m_1$  y  $m_2$  son

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0 \quad (19.58)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = P_m \sin \omega t \quad (19.59)$$

Considere ahora el circuito eléctrico de la figura 19.16; se denota, respectivamente, por  $i_1$  e  $i_2$  la corriente en el primero y el segundo lazos, y por  $q_1$  y  $q_2$  las integrales  $\int i_1 dt$  e  $\int i_2 dt$ . Al notar que la carga en el capacitor  $C_1$  es  $q_1$ , mientras que la carga en  $C_2$  es  $q_1 - q_2$ , se expresa que la suma de las diferencias de potencial en cada lazo es cero y se obtienen las siguientes ecuaciones

$$L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + R_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_2} = 0 \quad (19.60)$$

$$L_2 \ddot{q}_2 + R_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + \frac{q_1 - q_2}{C_2} = E_m \sin \omega t \quad (19.61)$$

Es fácil verificar que las ecuaciones (19.60) y (19.61) se reducen a (19.58) y (19.59), respectivamente, cuando se efectúan las sustituciones indicadas en la tabla 19.2.



# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se formuló un modelo más realista de un sistema vibratorio al incluir el efecto del *amortiguamiento viscoso* provocado por la fricción fluida. El amortiguamiento viscoso se representó en la figura 19.10 mediante la fuerza ejercida sobre el cuerpo en movimiento por un émbolo que se mueve en el interior de un amortiguador. Esta fuerza es igual en magnitud a  $c\dot{x}$ , donde la constante  $c$ , expresada en  $\text{N} \cdot \text{s/m}$  o  $\text{lb} \cdot \text{s/ft}$ , se conoce como *coeficiente de amortiguamiento viscoso*. Téngase presente que es necesario utilizar la misma convención de signos para  $x$ ,  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$ .

**1. Vibraciones libres amortiguadas.** Se encontró que la ecuación diferencial que define este movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (19.38)$$

Para obtener la solución de esta ecuación, calcule el *coeficiente de amortiguamiento crítico*  $c_c$  utilizando la fórmula

$$c_c = 2m\sqrt{k/m} = 2m\omega_n \quad (19.41)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia circular natural del sistema *no amortiguado*.

**a) Si  $c > c_c$  (sobreamortiguamiento),** la solución de la ecuación (19.38) es

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (19.42)$$

donde

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (19.40)$$

y donde las constantes  $C_1$  y  $C_2$  pueden determinarse a partir de condiciones iniciales  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$ . Esta solución corresponde a un movimiento no vibratorio.

**b) Si  $c = c_c$  (amortiguamiento crítico),** la solución de la ecuación (19.38) es

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_d t} \quad (19.43)$$

que corresponde también a un movimiento no vibratorio.

**c) Si  $c < c_c$  (subamortiguamiento),** la solución de la ecuación (19.38) es

$$x = x_0 e^{-(c/2m)t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (19.46)$$

donde

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \quad (19.45)$$

y donde  $x_0$  y  $\phi$  pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$ . Esta solución corresponde a oscilaciones de amplitud decreciente y de periodo  $\tau_d = 2\pi/\omega_d$  (figura 19.11).

(continúa)

**2. Vibraciones forzadas amortiguadas.** Estas vibraciones ocurren cuando un sistema con amortiguamiento viscoso se somete a una fuerza periódica  $\mathbf{P}$  de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$  o cuando está elásticamente conectado a un apoyo con un movimiento alternativo  $\delta = \delta_m \sin \omega_f t$ . En el primer caso el movimiento se define mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \sin \omega_f t \quad (19.47)$$

y en el segundo caso mediante una ecuación similar que se obtiene al reemplazar  $P_m$  con  $k\delta_m$ . Sólo interesa el movimiento de *estado estable* del sistema, el cual se define mediante una *solución particular* de estas ecuaciones, de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \sin(\omega_f t - \varphi) \quad (19.48)$$

donde

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \quad (19.53)$$

y

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.54)$$

La expresión dada en la ecuación (19.53) se conoce como *factor de amplificación* y se ha graficado en función de la razón de frecuencias  $\omega_f/\omega_n$  en la figura 19.12 para valores diferentes del factor de amortiguamiento  $c/c_c$ . En los problemas que siguen es posible que se le pida determinar uno de los parámetros de las ecuaciones (19.53) y (19.54) cuando se conocen los demás.

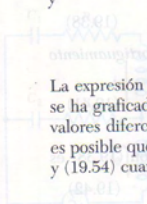


Figura 19.10

(19.47)



Figura 19.11

(19.48)

(19.49)

(19.50)

(19.51)

(19.52)



# Problemas

**19.126** Demuestre que en caso de sobreamortiguamiento ( $c > c_c$ ), un cuerpo nunca pasa por su posición de equilibrio  $O$  si *a*) se suelta sin velocidad inicial desde una posición arbitraria, o *b*) empieza desde  $O$  con velocidad inicial arbitraria.

**19.127** Demuestre que en caso de sobreamortiguamiento ( $c > c_c$ ), un cuerpo soltado desde una posición arbitraria con velocidad inicial arbitraria no puede pasar más de una vez por su posición de equilibrio.

**19.128** En el caso de subamortiguamiento, los desplazamientos  $x_1, x_2, x_3$ , mostrados en la figura 19.11 pueden suponerse iguales a los desplazamientos máximos. Demuestre que la razón de dos desplazamientos máximos sucesivos  $x_n$  y  $x_{n+1}$  es constante y que el logaritmo natural de este cociente, al cual se le llama *decremento logarítmico*, es

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi(c/c_c)}{\sqrt{1 - (c/c_c)^2}}$$

**19.129** En la práctica, a menudo resulta difícil determinar el decremento logarítmico de un sistema con subamortiguamiento, como el definido en el problema 19.128, mediante dos desplazamientos máximos sucesivos. Demuestre que el decremento logarítmico puede expresarse también como  $(1/k) \ln (x_n/x_{n+k})$ , donde  $k$  es el número de ciclos entre lecturas de desplazamiento máximo.

**19.130** En un sistema con subamortiguamiento ( $c < c_c$ ), el periodo de vibración se define comúnmente como el intervalo de tiempo  $\tau_d = 2\pi/\omega_d$  correspondiente a dos puntos sucesivos donde la curva desplazamiento-tiempo toca una de las curvas límite mostradas en la figura 19.11. Demuestre que el intervalo *a*) entre un desplazamiento positivo máximo y el siguiente desplazamiento negativo es  $\frac{1}{2}\tau_d$ , *b*) entre dos desplazamientos sucesivos de valor cero es  $\frac{1}{2}\tau_d$ , *c*) entre un desplazamiento máximo positivo y el siguiente desplazamiento cero es mayor que  $\frac{1}{4}\tau_d$ .

**19.131** Los desplazamientos máximos sucesivos de un sistema resorte-masa-amortiguador similar al mostrado en la figura 19.10 son de 1.25, 0.75 y 0.45 in. Si  $W = 36$  lb y  $k = 175$  lb/ft, determine *a*) el factor de amortiguamiento  $c/c_c$ , *b*) el valor del coeficiente de amortiguamiento viscoso  $c$ . (Sugerencia: Vea los problemas 19.128 y 19.129.)

**19.132** Un bloque de 2 kg está sostenido por un resorte de constante  $k = 128 \text{ N/m}$  y un amortiguador cuyo coeficiente de amortiguamiento viscoso es  $c = 0.6 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ . El bloque está en equilibrio cuando es golpeado desde abajo con un martillo que le imprime una velocidad hacia arriba de  $0.4 \text{ m/s}$ . Determine *a*) la disminución logarítmica, *b*) el desplazamiento máximo del bloque hacia arriba, desde el equilibrio y después de dos ciclos. (Sugerencia: Vea los problemas 19.125 y 19.129.)

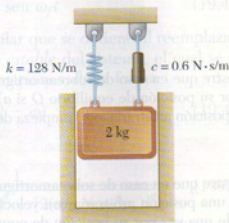


Figura P19.132

**19.133** El barril de un cañón de campaña pesa 1800 lb y, después del retroceso, regresa a la posición de disparo mediante un recuperador de constante  $c = 1320 \text{ lb} \cdot \text{s/ft}$ . Determine *a*) la constante  $k$  a utilizar para que el recuperador regrese el barril a la posición de disparo en el tiempo más corto posible sin ninguna oscilación, *b*) el tiempo necesario para que el barril retroceda dos tercios del trayecto desde su posición de retroceso máximo hasta la posición de disparo.

**19.134** Un bloque *B* de  $0.9 \text{ kg}$  se conecta mediante una cuerda a un bloque *A* de  $2.4 \text{ kg}$ , el cual está suspendido de dos resortes como se muestra, cada resorte tiene constante  $k = 180 \text{ N/m}$ , y de un amortiguador cuyo coeficiente de amortiguamiento es  $c = 7.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ . Si el sistema está en reposo cuando se corta la cuerda que conecta a *A* y *B*, determine la tensión mínima que se presentará en cada resorte durante el movimiento resultante.

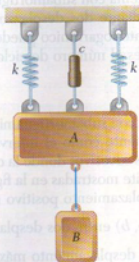


Figura P19.134 y P19.135

**19.135** Un bloque *B* de  $0.9 \text{ kg}$  se conecta mediante una cuerda a un bloque *A* de  $2.4 \text{ kg}$ , el cual está suspendido de dos resortes como se muestra, cada resorte tiene constante  $k = 180 \text{ N/m}$ , y de un amortiguador cuyo coeficiente de amortiguamiento es  $c = 60 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ . Si el sistema está en reposo cuando se corta la cuerda que conecta a *A* y *B*, determine la velocidad del bloque *A* después de  $0.1 \text{ s}$ .



**19.136** Una barra uniforme de 1.8 kg se sostiene mediante un pasador colocado en  $O$  y un resorte en  $A$ , y se conecta a un amortiguador en  $B$ . Determine *a*) la ecuación diferencial de movimiento para pequeñas oscilaciones, *b*) el ángulo que formará la barra con la horizontal 2.5 s después de empujar el extremo  $B$  23 mm hacia abajo y soltarlo.

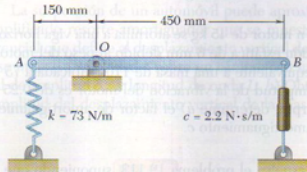


Figura P19.136

**19.137** Una barra delgada  $AB$  de 6 lb está atornillada a un disco uniforme de 10 lb. Un amortiguador con coeficiente de amortiguamiento  $c = 0.6 \text{ lb} \cdot \text{s}/\text{ft}$  se une al disco en la forma que muestra la figura. Determine *a*) la ecuación diferencial de movimiento para pequeñas oscilaciones, *b*) el factor de amortiguamiento  $c/c_c$ .

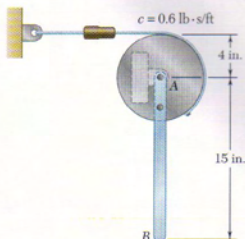


Figura P19.137

**19.138** Una plataforma de 200 lb de peso, sostenida por dos resortes de constante  $k = 250 \text{ lb}/\text{in.}$  cada uno, se somete a una fuerza periódica de magnitud máxima igual a 125 lb. Si el coeficiente de amortiguamiento es de  $9 \text{ lb} \cdot \text{s}/\text{in.}$ , determine *a*) la frecuencia natural de la plataforma en rpm de no existir amortiguamiento, *b*) la frecuencia en rpm de la fuerza periódica correspondiente al valor máximo del factor de magnificación, suponiendo amortiguamiento, *c*) la amplitud del movimiento real de la plataforma para cada una de las frecuencias encontradas en los incisos *a*) y *b*).

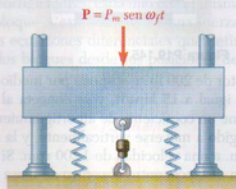


Figura P19.138

**19.139** Resuelva el problema 19.138, suponiendo que el coeficiente de amortiguamiento se incrementa a  $12 \text{ lb} \cdot \text{s}/\text{in.}$

**19.140** En el caso de la vibración forzada de un sistema, determine el intervalo de valores del factor de amortiguamiento  $c/c_c$  para el cual el factor de amplificación disminuirá siempre y cuando aumente la razón de frecuencias  $\omega_f/\omega_n$ .

**19.141** Demuestre que para un pequeño valor del factor de amortiguamiento  $c/c_c$ , la amplitud máxima de una vibración forzada ocurre cuando  $\omega_f \approx \omega_n$ , y que el valor correspondiente del factor de amplificación es  $\frac{1}{2}(c/c_c)$ .



Figura P19.142 y P19.143

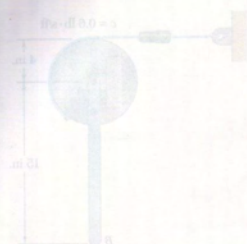


Figura P19.143

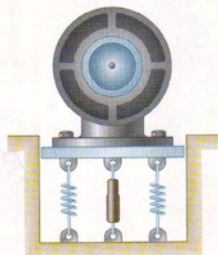


Figura P19.146

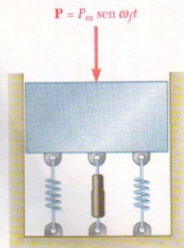


Figura P19.147 y P19.148

**19.142** Un motor de 36 lb se atornilla a una viga horizontal ligera que tiene una deflexión estática de 0.075 in. debido al peso del motor. Si el desbalance del rotor es equivalente a un peso de 0.64 oz localizado a 6.25 in. del eje de rotación, determine la amplitud de la vibración del motor a una velocidad de 900 rpm, suponiendo que a) no hay amortiguamiento, b) el factor de amortiguamiento  $c/c_c$  es igual a 0.055.

**19.143** Un motor de 45 kg se atornilla a una viga horizontal ligera que tiene una deflexión estática de 6 mm debido al peso del motor. El desbalance del rotor es equivalente a una masa de 110 g ubicada a 75 mm del eje de rotación. Si la amplitud de la vibración del motor es de 0.25 mm a una velocidad de 300 rpm, determine a) el factor de amortiguamiento  $c/c_c$ , b) el coeficiente de amortiguamiento  $c$ .

**19.144** Resuelva el problema 19.113, suponiendo que se ha conectado al motor y al piso un amortiguador cuyo coeficiente de amortiguamiento es  $c = 350 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ .

**19.145** El desbalance del rotor de un motor de 180 kg es equivalente a una masa de 85 g ubicada a 150 mm del eje de rotación. La almohadilla que se coloca entre el motor y la base es equivalente a un resorte de constante  $k = 7.5 \text{ kN/m}$  en paralelo con un amortiguador de constante  $c$ . Si la magnitud de la aceleración máxima del motor es de  $9 \text{ mm/s}^2$  a una velocidad de 100 rpm, determine el factor de amortiguamiento  $c/c_c$ .

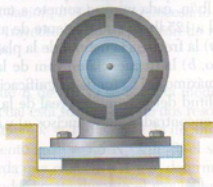


Figura P19.145

**19.146** Un motor de 200 lb se sostiene por medio de dos resortes, cada uno de constante igual a 15 kips/ft, y se conecta al suelo mediante un amortiguador que tiene un coeficiente de amortiguamiento  $c = 490 \text{ lb} \cdot \text{s/ft}$ . El motor está restringido a moverse verticalmente, y la amplitud de su movimiento es de 0.10 in. a una velocidad de 1200 rpm. Si el peso del rotor es de 30 lb, determine la distancia entre el centro de masa del rotor y el eje de la flecha.

**19.147** Un elemento de máquina se sostiene mediante resortes y se conecta a un amortiguador como indica la figura. Demuestre que si se aplica una fuerza periódica  $P = P_m \sin \omega t$  al elemento, la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida a la base es

$$F_m = P_m \sqrt{\frac{1 + [2(c/c_c)(\omega/\omega_n)]^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega/\omega_n)]^2}}$$

**19.148** Un elemento de máquina de 91 kg sostenido por cuatro resortes, cada uno de constante igual a 175 N/m, está sujeto a una fuerza periódica de 0.8 Hz de frecuencia y 89 N de amplitud. Determine la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida a la base si a) un amortiguador con un coeficiente de amortiguamiento  $c = 365 \text{ N} \cdot \text{s/m}$  se conecta a la máquina y al suelo, b) se quita el amortiguador.



**\*19.149** Para una vibración de estado estable con amortiguamiento bajo la acción de una fuerza armónica, demuestre que la energía mecánica que disipa por ciclo el amortiguador es  $E = \pi c x_m^2 \omega_f$ , donde  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $x_m$  la amplitud del movimiento, y  $\omega_f$  la frecuencia circular de la fuerza armónica.

**\*19.150** La suspensión de un automóvil puede aproximarse mediante el sistema simplificado resorte-amortiguador que se muestra. a) Escriba la ecuación diferencial que define al desplazamiento vertical de la masa  $m$  cuando el sistema se mueve a velocidad  $v$  sobre un camino con una sección transversal senoidal de amplitud  $\delta_m$  y longitud de onda  $L$ . b) Obtenga una expresión para la amplitud del desplazamiento vertical de la masa  $m$ .

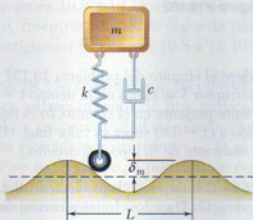


Figura P19.150

**\*19.151** Dos bloques A y B, cada uno de masa  $m$ , están soportados como se muestra mediante tres resortes de igual constante  $k$ . Los bloques A y B se conectan empleando un amortiguador y el bloque B se conecta al suelo utilizando dos amortiguadores, cada uno con el mismo coeficiente de amortiguamiento  $c$ . El bloque A está sometido a una fuerza de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$ . Escriba las ecuaciones diferenciales que definen los desplazamientos  $x_A$  y  $x_B$  de los dos bloques desde sus posiciones de equilibrio.

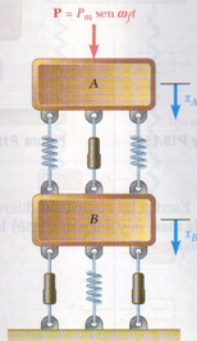


Figura P19.151



Figura P19.143 y P19.145

**19.152** Expresar, en términos de  $L$ ,  $C$  y  $E$ , el intervalo de valores de la resistencia  $R$  para el cual ocurrirán las oscilaciones en el circuito que se muestra cuando se cierra el interruptor  $S$ .

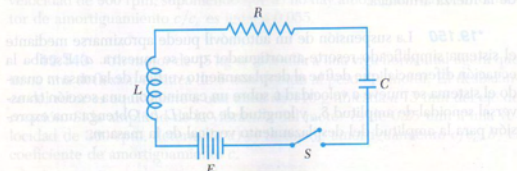


Figura P19.152

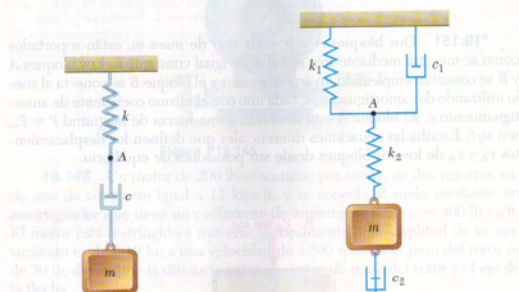
**19.144** Considere el sistema mecánico de la figura P19.143, suponiendo que se lo conecta al motor y al peso un amortiguador con un coeficiente de amortiguamiento  $c = 350 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ .

**19.153** Considere el circuito del problema 19.152 cuando se quita el capacitor  $C$ . Si el interruptor  $S$  se cierra en el tiempo  $t = 0$ , determine a) el valor final de la corriente presente en el circuito, b) el tiempo  $t$  en el cual la corriente habrá llegado a  $(1 - 1/e)$  veces su valor final. (El valor deseado de  $t$  se conoce como la constante de tiempo del circuito.)

**19.154 y 19.155** Dibuje el análogo eléctrico del sistema mecánico que se muestra. (Sugerencia: Trace los circuitos correspondientes a los cuerpos libres  $m$  y  $A$ .)



Figura P19.146



**19.147** Un motor de  $200 \text{ lb}$  se sostiene por un eje de dos resortes, cada uno de los cuales tiene un coeficiente de amortiguamiento  $c = 450 \text{ lb} \cdot \text{s/ft}$ . El motor está restringido a moverse verticalmente en un plano vertical. El eje del motor es de  $30 \text{ lb}$ , y la distancia entre el eje del motor y el eje de la barra es de  $10 \text{ ft}$ .

**19.148** Un elemento de máquina de  $9 \text{ lb}$  se sostiene por cuatro resortes, cada uno de constante igual a  $147 \text{ lb/in}$ , y está sujeto a una fuerza periódica de  $0.5 \text{ Hz}$  de frecuencia y  $1 \text{ lb}$  de amplitud. Determine la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida a la base si el elemento está amortiguado con un coeficiente de amortiguamiento  $c = 0.5 \text{ lb} \cdot \text{s/in}$ .

**19.149** Un elemento de máquina de  $9 \text{ lb}$  se sostiene por cuatro resortes, cada uno de constante igual a  $147 \text{ lb/in}$ , y está sujeto a una fuerza periódica de  $0.5 \text{ Hz}$  de frecuencia y  $1 \text{ lb}$  de amplitud. Determine la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida a la base si el elemento está amortiguado con un coeficiente de amortiguamiento  $c = 0.5 \text{ lb} \cdot \text{s/in}$ .

**19.156 y 19.157** Escriba las ecuaciones diferenciales que definen a) los desplazamientos de la masa  $m$  y del punto  $A$ , b) las cargas en los capacitores del análogo eléctrico.

**19.158** Un elemento de máquina de  $9 \text{ lb}$  se sostiene por cuatro resortes, cada uno de constante igual a  $147 \text{ lb/in}$ , y está sujeto a una fuerza periódica de  $0.5 \text{ Hz}$  de frecuencia y  $1 \text{ lb}$  de amplitud. Determine la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida a la base si el elemento está amortiguado con un coeficiente de amortiguamiento  $c = 0.5 \text{ lb} \cdot \text{s/in}$ .

Figura P19.156 y P19.157



# REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 19

Este capítulo se dedicó al estudio de las vibraciones mecánicas, esto es, al análisis de movimiento de partículas y cuerpos rígidos que oscilan en torno a una posición de equilibrio. En la primera parte del capítulo [secciones 19.2 a 19.7] se consideraron vibraciones sin amortiguamiento, mientras que en la segunda parte se trataron las vibraciones amortiguadas [secciones 19.8 a 19.10].

En la sección 19.2 se consideraron las vibraciones libres de una partícula, esto es, el movimiento de una partícula  $P$  sujeta a una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento de la partícula —como la fuerza ejercida por un resorte—. Si el desplazamiento  $x$  de la partícula  $P$  se mide desde su posición de equilibrio  $O$  (figura 19.17), la resultante  $F$  de las fuerzas que actúan sobre  $P$  (incluyendo su peso) tiene una magnitud  $kx$  y está dirigida a  $O$ . Al aplicar la segunda ley de Newton  $F = ma$  y al recordar que  $a = \ddot{x}$ , se escribe la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (19.2)$$

o, con  $\omega_n^2 = k/m$ ,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (19.6)$$

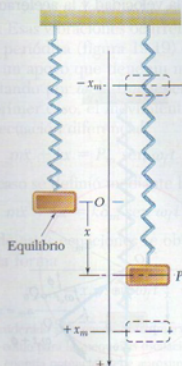


Figura 19.17

Péndulo simple

Vibraciones libres de un cuerpo rígido

Vibraciones libres de una partícula

Empiezo del principio de la conservación de la energía

Vibraciones forzadas

El movimiento definido por esta ecuación recibe el nombre de *movimiento armónico simple*.

La solución de la ecuación (19.6), que representa el desplazamiento de la partícula  $P$ , se expresó como

$$x = x_m \sin(\omega_n t + \phi) \quad (19.10)$$

donde  $x_m$  = amplitud de la vibración

$\omega_n = \sqrt{k/m}$  = frecuencia circular natural

$\phi$  = ángulo de fase

El *periodo de vibración* (esto es, el tiempo requerido para un ciclo completo) y su *frecuencia natural* (esto es, el número de ciclos por segundo) se expresaron como

$$\text{Periodo} = \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (19.13)$$

$$\text{Frecuencia natural} = f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (19.14)$$

La velocidad y aceleración de la partícula se obtuvieron al diferenciar la ecuación (19.10), y se encontró que los valores máximos son

$$v_m = x_m \omega_n \quad a_m = x_m \omega_n^2 \quad (19.15)$$

Puesto que todos los parámetros anteriores dependen de manera directa de la frecuencia circular natural  $\omega_n$  y, por ello, el cociente  $k/m$ , resulta esencial en cualquier problema dado calcular el valor de la constante  $k$ ; esto puede realizarse determinando la relación entre la fuerza restauradora y el desplazamiento correspondiente de la partícula [problema resuelto 19.1].

También se demostró que el movimiento oscilatorio de la partícula  $P$  puede representarse mediante la proyección sobre el eje  $x$  del movimiento de un punto  $Q$  que describe un círculo auxiliar de radio  $x_m$  con la velocidad angular  $\omega_n$  (figura 19.18). Los valores instantáneos de la velocidad y la aceleración de  $P$  se obtienen entonces proyectando sobre el eje  $x$  los vectores  $\mathbf{v}_m$  y  $\mathbf{a}_m$  que representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración de  $Q$ .

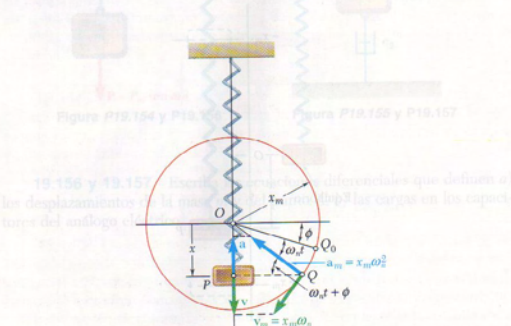


Figura 19.18



Si bien el movimiento de un *péndulo simple* no es verdaderamente un movimiento armónico simple, las fórmulas dadas antes pueden utilizarse con  $\omega_n^2 = g/l$  para calcular el periodo y la frecuencia natural de las *pequeñas oscilaciones* de un péndulo simple [sección 19.31]. Las oscilaciones de gran amplitud de un péndulo simple se analizaron en la sección 19.4.

Las *vibraciones libres de un cuerpo rígido* se analizan eligiendo una variable apropiada, con una distancia  $x$  o un ángulo  $\theta$ , para definir las posiciones del cuerpo, dibujando una ecuación de diagramas de cuerpo libre para expresar la equivalencia de las fuerzas externas y efectivas, y escribiendo una ecuación que relaciona la variable elegida y su segunda derivada [sección 19.5]. Si la ecuación que se obtiene es de la forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (19.21)$$

la vibración considerada es un movimiento armónico simple y su periodo y frecuencia natural se obtienen *identificando*  $\omega_n$  y sustituyendo su valor en las ecuaciones (19.13) y (19.14) [problemas resueltos 19.2 y 19.3].

El *principio de conservación de la energía* puede utilizarse como un método alternativo para la determinación del periodo y frecuencia natural del movimiento armónico simple de una partícula o cuerpo rígido [sección 19.6]. Eligiendo de nuevo una variable apropiada, como  $\theta$ , para definir la posición del sistema, se expresa que la energía total del sistema se conserva.  $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ , entre la posición de desplazamiento máximo ( $\theta_1 = \theta_m$ ) y la posición de velocidad máxima ( $\theta_2 = \theta_m$ ). Si el movimiento considerado es armónico simple, los dos miembros de la ecuación obtenida consisten en expresiones cuadráticas homogéneas en  $\theta_m$  y  $\dot{\theta}_m$ , respectivamente.† Sustituyendo  $\dot{\theta}_m = \theta_m \omega_n$  en esta ecuación, podemos sacar como factor  $\theta_m^2$  y resolver para la frecuencia circular  $\omega_n$  [problema resuelto 19.4].

En la sección 19.7 se consideraron las *vibraciones forzadas* de un sistema mecánico. Esas vibraciones ocurren cuando el sistema se somete a una fuerza periódica (figura 19.19) o cuando está conectado elásticamente a un apoyo que tiene un movimiento alternante (figura 19.20). Denotando por  $\omega_f$  la frecuencia circular forzada, se encontró que en el primer caso, el movimiento del sistema se definió por medio de la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = P_m \sin \omega_f t \quad (19.30)$$

y que en el segundo caso se definió mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \sin \omega_f t \quad (19.31)$$

La solución general de estas ecuaciones se obtuvo al sumar una solución particular de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \sin \omega_f t \quad (19.32)$$

†Si el movimiento considerado sólo puede *aproximarse* por medio de un movimiento armónico simple, como para las pequeñas oscilaciones de un cuerpo bajo la acción de la gravedad, la energía potencial debe aproximarse mediante una expresión cuadrática en  $\theta_m$ .

## Péndulo simple

## Vibraciones libres de un cuerpo rígido

## Vibraciones forzadas amortiguadas

## Empleo del principio de la conservación de la energía

## Vibraciones forzadas

## analogías entre sistemas

## Analogías eléctricas

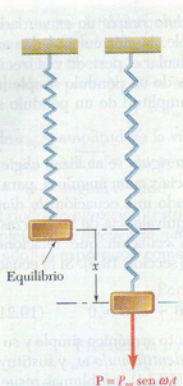


Figura 19.19

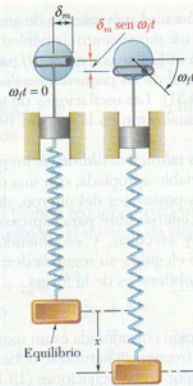


Figura 19.20

a la solución general de la ecuación homogénea correspondiente. La solución particular (19.32) representa una *vibración de estado estable* del sistema, mientras que la solución de la ecuación homogénea representa una *vibración libre transitoria* que por lo general puede ignorarse.

Al dividir la amplitud  $x_m$  de la vibración de estado estable por  $P_m/k$  en el caso de una fuerza periódica, o por  $\delta_m$  en el caso de un apoyo oscilante, se define el *factor de amplificación* de la vibración y se encuentra que

$$\text{Factor de amplificación} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.36)$$

De acuerdo con la ecuación (19.36), la amplitud  $x_m$  de la vibración forzada *se vuelve infinita cuando  $\omega_f = \omega_n$* , esto es cuando la *frecuencia forzada es igual a la frecuencia natural del sistema*. Se dice en ese caso que la fuerza aplicada o el movimiento del apoyo aplicado están en *resonancia* con el sistema [problema resuelto 19.5]. En realidad la amplitud de la vibración se muestra finita, debido a las fuerzas amortiguadas.

### Vibraciones libres amortiguadas

En la última parte del capítulo se consideraron las *vibraciones amortiguadas* de un sistema mecánico. Primero se analizaron las *vibraciones libres amortiguadas* de un sistema con *amortiguamiento viscoso* [sección 19.8]. Se encontró que el movimiento de un sistema de este tipo se definió mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (19.38)$$



donde  $c$  es una constante llamada el *coeficiente de amortiguamiento viscoso*. Al definir el *coeficiente de amortiguamiento crítico*  $c_c$  como

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \quad (19.41)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia circular natural del sistema en ausencia de amortiguamiento, se distinguieron tres casos de amortiguamiento diferentes, a saber, (1) *sobreamortiguamiento*, cuando  $c > c_c$ ; (2) *amortiguamiento crítico*, cuando  $c = c_c$ ; y (3) *subamortiguamiento*, cuando  $c < c_c$ . En los primeros dos casos, cuando el sistema se perturba tiende a recobrar su posición de equilibrio sin ninguna oscilación. En el tercer caso, el movimiento es vibratorio con amplitud decreciente.

En la sección 19.9 se consideraron las *vibraciones forzadas amortiguadas* de un sistema mecánico. Estas vibraciones ocurren cuando un sistema con amortiguamiento viscoso está sujeto a una fuerza periódica  $\mathbf{P}$  de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$  o cuando se conecta elásticamente a un apoyo con un movimiento alternante  $\delta = \delta_m \sin \omega_f t$ . En el primer caso, el movimiento del sistema se definió mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \sin \omega_f t \quad (19.47)$$

y en el segundo caso por medio de una ecuación similar que se obtuvo al sustituir  $P_m$  de  $k\delta_m$  en (19.47).

La *vibración de estado estable* del sistema se representa mediante una solución particular de la ecuación (19.47) de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \sin(\omega_f t - \varphi) \quad (19.48)$$

Al dividir la amplitud  $x_m$  de la vibración de estado estable entre  $P_m/k$  en el caso de una fuerza periódica, o por  $\delta_m$  en el caso de un apoyo oscilante, se obtuvo la siguiente expresión para el factor de amplificación

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \quad (19.53)$$

donde  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  = frecuencia circular natural del sistema no amortiguado

$c_c = 2m\omega_n$  = coeficiente de amortiguamiento crítico

$c/c_c$  = factor de amortiguamiento

También se encontró que la *diferencia de fase*  $\varphi$  entre la fuerza o el movimiento del apoyo aplicados y la vibración resultante de estado estable del sistema amortiguado se definía por medio de la relación

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.54)$$

El capítulo finalizó con un análisis de *analogías eléctricas* [sección 19.10], en el cual se demostró que las vibraciones de los sistemas mecánicos y las oscilaciones de los circuitos eléctricos están definidas por las mismas ecuaciones diferenciales. Las analogías eléctricas de sistemas mecánicos pueden entonces utilizarse para estudiar o predecir el comportamiento de estos sistemas.



Figura P19.182

### Vibraciones forzadas amortiguadas



Figura P19.183

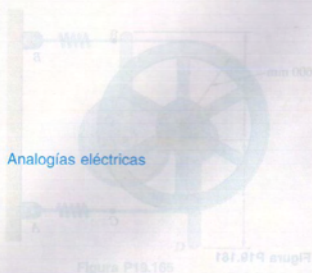


Figura P19.186

### Analogías eléctricas

# Problemas de repaso

**19.158** La plomada de un péndulo simple de longitud  $l = 40$  in. se suelta desde el reposo cuando  $\theta = +5^\circ$ . Si existe movimiento armónico simple, determine para 1.6 s después de la liberación *a*) el ángulo  $\theta$ , *b*) las magnitudes de la velocidad y aceleración de la plomada.

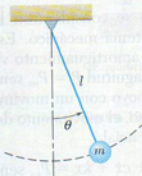


Figura P19.158

**19.159** Un bloque de 50 kg se sostiene mediante el arreglo de resortes que se muestra. El bloque se desplaza verticalmente hacia abajo a partir de su posición de equilibrio y luego se suelta. Si la amplitud del movimiento resultante es igual a 60 mm, determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento, *b*) la velocidad y la aceleración máximas del bloque.

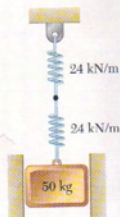


Figura P19.159

**19.160** Una barra de masa  $m$  y longitud  $L$  descansa sobre dos poleas *A* y *B* que giran en direcciones opuestas como se muestra. Denotando mediante  $\mu_k$  el coeficiente de fricción cinética entre la barra y las poleas, determine la frecuencia de vibración si a la barra se le aplica un pequeño desplazamiento hacia la derecha y luego se suelta.

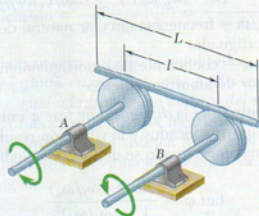


Figura P19.160

**19.161** Un volante de 270 kg tiene diámetro de 1.2 m y radio de giro de 0.5 m. Sobre el borde se le coloca una banda que se conecta a dos resortes, cada uno de constante  $k = 13$  kN/m. La tensión inicial en la banda es suficiente para evitar el deslizamiento. Si el extremo *C* de la banda se empuja 25 mm hacia la derecha y luego se suelta, determine *a*) el periodo de vibración, *b*) la velocidad angular máxima del volante.

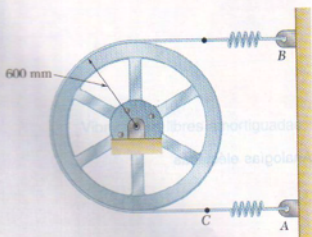


Figura P19.161



**19.162** Dos pesos pequeños  $w$  se colocan en  $A$  y  $B$  en el borde de un disco uniforme de radio  $r$  y peso  $W$ . Denotando mediante  $\tau_0$  el periodo de pequeñas oscilaciones cuando  $\beta = 0$ , determine el ángulo  $\beta$  para el cual el periodo de pequeñas oscilaciones es  $2\tau_0$ .

**19.163** Dos barras uniformes, cada una de peso  $W = 24$  lb y longitud  $L = 40$  in., se sueldan entre sí para formar el ensamble mostrado. Si la constante de cada resorte es  $k = 50$  lb/ft y al extremo  $A$  se le aplica un pequeño desplazamiento y se suelta, determine la frecuencia del movimiento resultante.

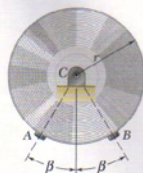


Figura P19.162

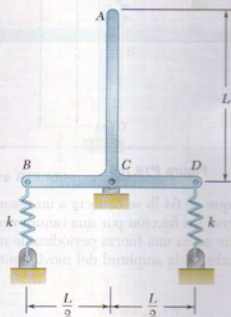


Figura P19.163

**19.164** Una barra ligera  $AB$  de 6 lb se atornilla a un disco uniforme de 10 lb. Un resorte de constante igual a 25 lb/ft se conecta al disco y no está deformado en la posición que muestra la figura. Si al extremo  $B$  de la barra se le aplica un pequeño desplazamiento y luego se le suelta, determine el periodo de vibración del sistema.

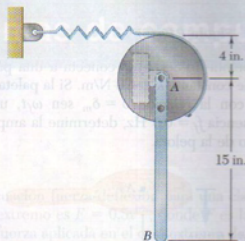


Figura P19.164

**19.165** Dos barras uniformes  $AB$  y  $CD$ , cada una de longitud  $l$  y masa  $m$ , están conectadas a engranes en la forma que se indica. Si la masa del engrane  $C$  es  $m$  y la del engrane  $A$  es  $4m$ , determine el periodo de pequeñas oscilaciones del sistema.

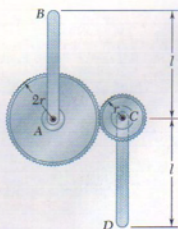


Figura P19.165



Figura P19.166

**19.166** Un péndulo invertido que consiste en una esfera de peso  $W$  y una barra  $ABC$ , de longitud  $l$  y peso insignificante, se sostiene mediante un pasador y una ménsula colocados en  $C$ . Un resorte de constante  $k$  se conecta a la barra en el punto  $B$  y no está deformado cuando la barra está en la posición vertical mostrada. Determine *a*) la frecuencia de pequeñas oscilaciones, *b*) el valor mínimo de  $a$  para el cual ocurrirán las oscilaciones.

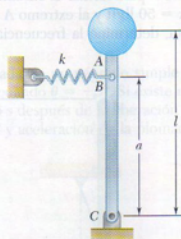


Figura P19.166

**19.167** Un bloque de 64 lb se conecta a un resorte de constante  $k = 1$  kip/ft y puede moverse sin fricción por una ranura vertical en la forma indicada. Sobre el bloque actúa una fuerza periódica de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$ , donde  $\omega_f = 10$  rad/s. Si la amplitud del movimiento es de 0.75 in., determine  $P_m$ .



Figura P19.167

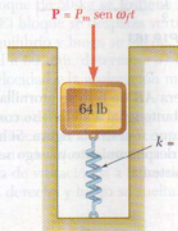


Figura P19.167

**19.168** Una pelota de 360 g se conecta a una paleta mediante una cuerda elástica  $AB$  de constante  $k = 70$  N/m. Si la paleta se mueve verticalmente de acuerdo con la relación  $\delta = \delta_m \sin \omega_f t$ , una amplitud  $\delta_m = 200$  mm y una frecuencia  $f_f = 0.5$  Hz, determine la amplitud de estado estable del movimiento de la pelota.

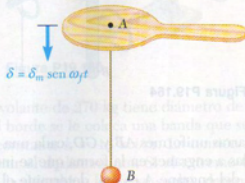


Figura P19.168



**19.169** Una barra uniforme de masa  $m$  se sostiene mediante un pasador colocado en  $A$  y un resorte de constante  $k$  en  $B$ , y se conecta en  $D$  a un amortiguador cuyo coeficiente de amortiguamiento es  $c$ . Determine, en términos de  $m$ ,  $k$  y  $c$ , para pequeñas oscilaciones, a) la ecuación diferencial de movimiento, b) el coeficiente de amortiguamiento crítico  $c_c$ .

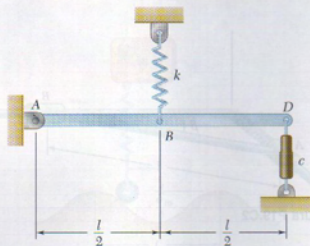


Figura P19.169

## Problemas de computadora

**19.C1** La ecuación fuerza-deflexión para una clase de resortes no lineales fijos en un extremo es  $F = 0.5x^{1/n}$ , donde  $F$  es la magnitud, expresada en libras, de la fuerza aplicada en el otro extremo del resorte y  $x$  es la deflexión expresada en pies. Si un bloque de peso  $W$  se suspende del resorte y experimenta un pequeño desplazamiento hacia abajo a partir de su posición de equilibrio, utilice un programa de cómputo y calcule y grafique la frecuencia de vibración del bloque para valores de  $W$  iguales a 0.5, 0.75 y 1.0 lb y valores de  $n$  de 1 a 2. Suponga que la pendiente de la curva fuerza-deformación en el punto correspondiente a  $F = W$  puede utilizarse como una constante de resorte equivalente.

**19.C2** La barra ligera  $AB$  de peso  $W_{AB}$  se conecta a dos collarnes idénticos, cada uno de peso  $W$ . El sistema yace en el plano horizontal y está en equilibrio en la posición que se muestra cuando al collarín  $A$  se le desplaza una corta distancia y después se le suelta. Calcule y grafique el periodo de vibración para valores del ángulo  $\beta$  desde  $10^\circ$  a  $80^\circ$  para razones de pesos  $W/W_{AB}$  de 0, 2 y 4.

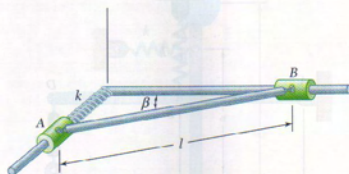


Figura P19.C2

**19.C3** Cuatro resortes, cada uno de constante igual a 350 lb/in. soportan un motor de 30 lb. El desbalance del motor es equivalente al peso de 0.04 lb localizadas a 5 in. del eje de rotación. Si el motor está restringido a moverse verticalmente, utilice software para calcular y graficar la amplitud de la vibración y la aceleración máxima del motor para velocidades del mismo desde 0 hasta 1250 rpm y desde 1300 hasta 2500 rpm.

**19.C4** Resuelva el problema 19.C3 suponiendo que un amortiguador con un coeficiente de amortiguamiento  $c = 160 \text{ lb} \cdot \text{s}/\text{ft}$  se ha conectado a la base del motor y al suelo. Considere velocidades del motor desde 0 hasta 2500 rpm.

**19.C5** Un elemento de máquina sostenido por resortes y conectado a un amortiguador se somete a una fuerza periódica de magnitud  $P = P_m \sin \omega_f t$ . La transmisibilidad  $T_m$  del sistema se define como la razón  $F_m/P_m$  del valor máximo  $F_m$  de la fuerza periódica fluctuante transmitida a la base al valor máximo  $P_m$  de la fuerza periódica aplicada al elemento de la máquina. Utilice software para calcular y graficar el valor de  $T_m$  para una razón de frecuencias  $\omega_f/\omega_n$  desde 0 hasta 5 y para factores de amortiguamiento  $c/c_c$  iguales a 0.1, 0.4, 0.7 y 1. (Sugerencia: Utilice la fórmula dada en el problema 19.147.)

cuarta elástica  $AB$  de constante  $k = 75 \text{ N/m}$ . Si la paleta se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación  $y = 0.01 \sin \omega_f t$ , una amplitud  $\delta_m = 200 \text{ cm}$  y una frecuencia  $f = 10 \text{ Hz}$ , determine la amplitud de estado estable del movimiento de la paleta.

$$P = P_m \sin \omega_f t$$

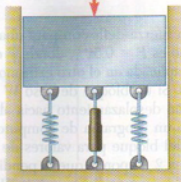


Figura P19.C5



**19.C6** La suspensión de un automóvil puede aproximarse por medio de un sistema simplificado de resorte y amortiguador que se muestra. Escriba la ecuación diferencial que define el movimiento vertical de la masa relativa al camino cuando el sistema se mueve a una velocidad  $v$  sobre un camino con una sección transversal senoidal  $\delta_m$  y longitud de onda  $L$ . Determine y grafique la amplitud del desplazamiento de la masa relativa al camino como una función de la velocidad  $v$  para factores de amortiguamiento  $c/c_c = 0.1, 0.5$  y  $0.9$ .

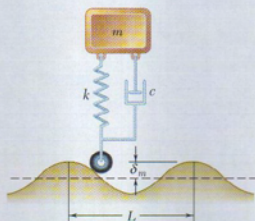


Figura P19.C6

**19.C7** Un bloque de masa  $m = 90$  kg, sostenido por dos resortes de constante  $k_1 = k_2 = 85$  kN/m, está sujeto a una fuerza periódica de magnitud máxima  $P_m = 500$  N. El coeficiente de amortiguamiento es  $c = 2500$  N · s/m. a) Calcule y grafique la amplitud de la vibración estable del bloque para valores de  $\omega_f$  desde 0 hasta 100 rad/s. b) Determine la amplitud máxima y la frecuencia correspondiente.

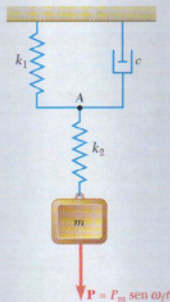


Figura P19.C7